VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra informatiky

Faktorizace kompletních grafů na housenky s průměrem 6

Factorizations of Complete Graphs into Caterpillars of Diameter 6

2013 Helena Nedošínská

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra informatiky

Zadání bakalářské práce

Student: **Helena Nedošínská**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 2612R025 Informatika a výpočetní technika

Téma: Faktorizace kompletních grafů na housenky s průměrem 6
Factorizations of Complete Graphs into Caterpillars of Diameter 6

Zásady pro vypracování:

Faktorizace kompletních grafů na různé vzájemně izomorfní grafy je klasickým tématem teorie grafů. Tato práce bude zaměřena na faktorizace kompletních grafů na speciální jednoduché stromy, kterým říkáme housenky s průměrem 6. Cíl této práce je najít dosud neznámou nekonečnou třídu housenek s průměrem 6, které faktorizují kompletní graf na 2n vrcholech (pro n liché), dále bude součástí práce programování faktorizací kompletních grafů na housenky diametru 6 s malým počtem vrcholů (2n =8,10).

1. Citace známých výsledků, zvláště pak týkajících se faktorizace kompletních grafů na housenky s průměrem 4 a 5.
2. Citace již známých nutných podmínek pro faktorizaci kompletních grafů na kostry a jejich aplikace při charakterizaci vybrané nekonečné třídy housenek s diametrem 6.
3. Uvedení grafových ohodnocení stromů, jejichž existence zajišťuje faktorizaci či dekompozici kompletních grafů.
4. Charakterizace nekonečné třídy housenek s průměrem 6, které faktorizují kompletní graf s 2n vrcholy.
5. Implementace programu, který bude sloužit pro vstup zkoumaných stromů (například housenek diametru 6, ale nejen těch) do softwaru pro paralelní vyhledávání faktorizací kompletních grafů.
6. Závěr a výhledy dalšího výzkumu.

Seznam doporučené odborné literatury:

[1] D. Frončk, P. Kovář, T. Kovářová, M. Kubesa: Factorizations of Complete Graphs into Caterpillars of Diameter 5, Discrete Mathematics, č. 310, 2010, str. 537-556
[2] P. Kovář: Necessary conditions for factorizations of complete graphs into spanning trees, 2011, manuscript
Dále podle pokynů vedoucího bakalářské práce.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Michael Kubesa, Ph.D.**

Datum zadání: 18.11.2011

Datum odevzdání: 07.05.2013

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ-TECHNICKÁ UNIVERZITA
Fakulta elektrotechniky a informatiky
1
OSTRAVA

doc. Dr. Ing. Eduard Sojka	prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
vedoucí katedry	*děkan fakulty*

Souhlasím se zveřejněním této bakalářské práce dle požadavků čl. 26, odst. 9 *Studijního a zkušebního řádu pro studium v bakalářských programech VŠB-TU Ostrava.*

V Ostravě 30. dubna 2013 Helena Nedošínská
....

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Ostravě 30. dubna 2013 Helena Nedošínská
....

Na tomto místě bych chtěla poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce panu RNDr. Michaelu Kubesovi, Ph.D. za odborné vedení, ochotu, trpělivost a rady, které mi velmi pomohly k napsání této bakalářské práce. Také bych chtěla poděkovat panu doc. Mgr. Petru Kovářovi, Ph.D. za jeho čas, trpělivost, cenné rady a připomínky.

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce je nalézt dosud neznámou nekonečnou třídu housenek s průměrem 6, které faktorizují kompletní graf na $2n$ vrcholech (pro n liché), implementace programu pro vyhledávání smíšených ohodnocení pro kostry a implementace programu, který bude sloužit pro vstup zkoumaných stromů do softwaru pro paralelní vyhledávání faktorizací kompletních grafů. Součástí práce je citace známých výsledků pro faktorizace kompletních grafů na housenky s průměrem 4 a 5, dále citace nutných podmínek a postačujících podmínek pro faktorizaci kompletních grafů na kostry a jejich aplikace při charakterizaci vybrané nekonečné třídy housenek s průměrem 6.

Klíčová slova: faktorizace, kompletní graf, kostra, housenka

Abstract

The goal of this bachelor thesis is to find an unknown infinite class of caterpillars with a diameter 6 that factorizes a complete graph of order $2n$ (where n is odd), an implementation of a programme for finding blended labeling of spanning trees, and an implementation of a programme which will work as an input into the software used for parallel search for factorizations of complete graphs. A part of the thesis is a citation of known results for factorizations of complete graphs into caterpillars with diameters 4 and 5. Further included is a citation of necessary conditions and sufficient conditions for factorizations of complete graphs into spanning trees and their applications for characterization of chosen infinite class of caterpillars with a diameter 6.

Keywords: factorization, complete graph, spanning tree, caterpillar

Obsah

1 Úvod

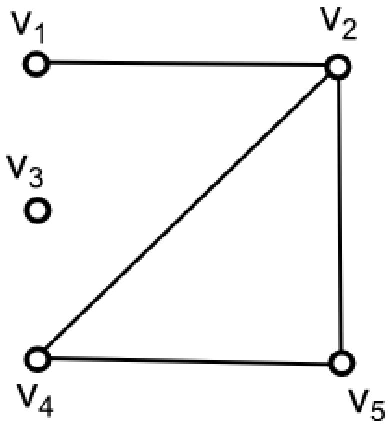
Faktorizace kompletních grafů na izomorfní podgrafy je klasické téma nejen teorie grafů, ale také tzv. teorie designů. Toto téma je intenzivně zkoumáno od šedesátých let minulého století, avšak o faktorizacích kompletních grafů se sudým počtem vrcholů na izomorfní kostry bylo ještě donedávna známo velmi málo. (Pouze se vědělo, že kompletní graf faktorizují hamiltonovská cesta, dvojhvězda a existovala hypotéza, že každá symetrická kostra faktorizuje kompletní graf.) O nesymetrických kostrách nebylo známo nic. V letech 2004-2011 se podařilo týmu (Kovář, Kovářová, Kubesa) kolem prof. Frončka plně charakterizovat kostry s nejvýše čtyřmi nelistovými vrcholy, které faktorizují či nefaktorizují kompletní grafy se sudým počtem vrcholů. Tato práce přirozeně navazuje na předešlé výsledky a zabývá se faktorizacemi kompletních grafů na některé kostry s pěti nelistovými vrcholy.

2 Teorie

2.1 Grafy

Definice 2.1 *Graf G je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je neprázdná množina vrcholů a E je nějaká množina dvouprvkových podmnožin množiny V, zvaných hrany.*

Vrcholovou množinu grafu G označíme jako $V(G)$ a hranovou množinu grafu G označíme jako $E(G)$. Graf G pak můžeme označit jako $G(V, E)$, popř. $G = (V, E)$. Grafy můžeme znázorňovat pomocí tzv. diagramů. Vrcholy diagramů znázorňujeme pomocí bodů (nejčastěji prázdnými kolečky) v rovině a hrany pomocí křivek. Křivky v diagramu spojují dvojice bodů, které znázorňují vrcholy grafu. Hrana je v grafu reprezentována jako dvouprvková množina vrcholů, kdežto v diagramu je hrana reprezentována křivkou spojující dva vrcholy. Vrcholy, které určují hranu, nazýváme *koncové vrcholy* hrany. Koncové vrcholy dané hrany jsou s hranou *incidentní* a takové vrcholy nazýváme *sousední*. Naopak ty vrcholy, které spojeny hranou nejsou, nazýváme *nesousedními*, popř. *nezávislými* vrcholy. *Nezávislá množina* je taková množina, ve které nejsou žádné dva vrcholy sousední. Dvě hrany jsou *sousední*, pokud mají společný koncový vrchol. Pokud společný koncový vrchol nemají, nazveme dvě hrany *nesousedními*, popř. *nezávislými*. Ke značení hran používáme obvykle písmena z počátku abecedy, a to nejčastěji e a f, vrcholy naopak nejčastěji označujeme písmeny z konce abecedy, $u, v, \ldots, z$. Označení hrany e s koncovými vrcholy u a v pak může být buď $e = uv$ nebo jen uv. Ukázku diagramu grafu máme na obr. 1.



Obr. 1: Příklad grafu

Můžeme narazit i na obecnější definice grafů, ve kterých existují tzv. *násobné hrany*, tj. vrcholy jsou spojeny více než jen jednou hranou, nebo *smyčky* (oba koncové vrcholy smyčny jsou totožné). Takovéto grafy nazýváme *multigrafy*. Naopak grafy, ve kterých nejsou smyčky ani násobné hrany, nazýváme *jednoduchými grafy*. V naší práci se budou vyskytovat výhradně jednoduché grafy s konečnou vrcholovou množinou.

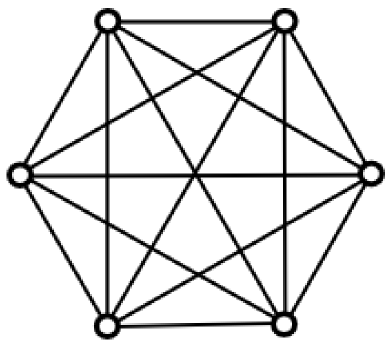
2.2 Stupeň vrcholu

Definice 2.2 *Stupeň vrcholu $v \in G$ je počet hran, se kterými je vrchol v incidentní. Označujeme jej* $\deg(v)$ *nebo* $\deg_G(v)$.

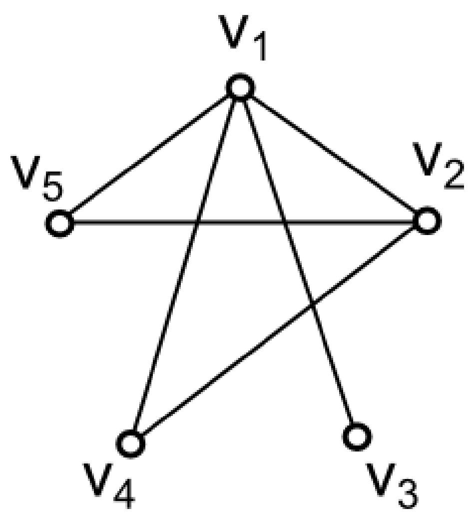
Označení $\deg_G(v)$ použijeme, chceme-li rozlišit, ke kterému grafu se vztahuje konkrétní stupeň vrcholu v.

Pravidelný nebo také *regulární* graf G má všechny vrcholy stejných stupňů. Platí-li pro každý vrchol $v \in V(G)$, že $\deg(v) = r$, pak hovoříme o r-pravidelném nebo r-regulárním grafu G. Ukázku vidíme na obr. 2.

Největší stupeň grafu G (největší stupeň vrcholu v grafu) značíme $\Delta(G)$ a *nejmenší stupeň* grafu G (nejmenší stupeň vrcholu v grafu) značíme $\delta(G)$. Ukázku vidíme na obr. 3.



Obr. 2: 5-pravidelný graf, $\delta(G) = \Delta(G) = 5$



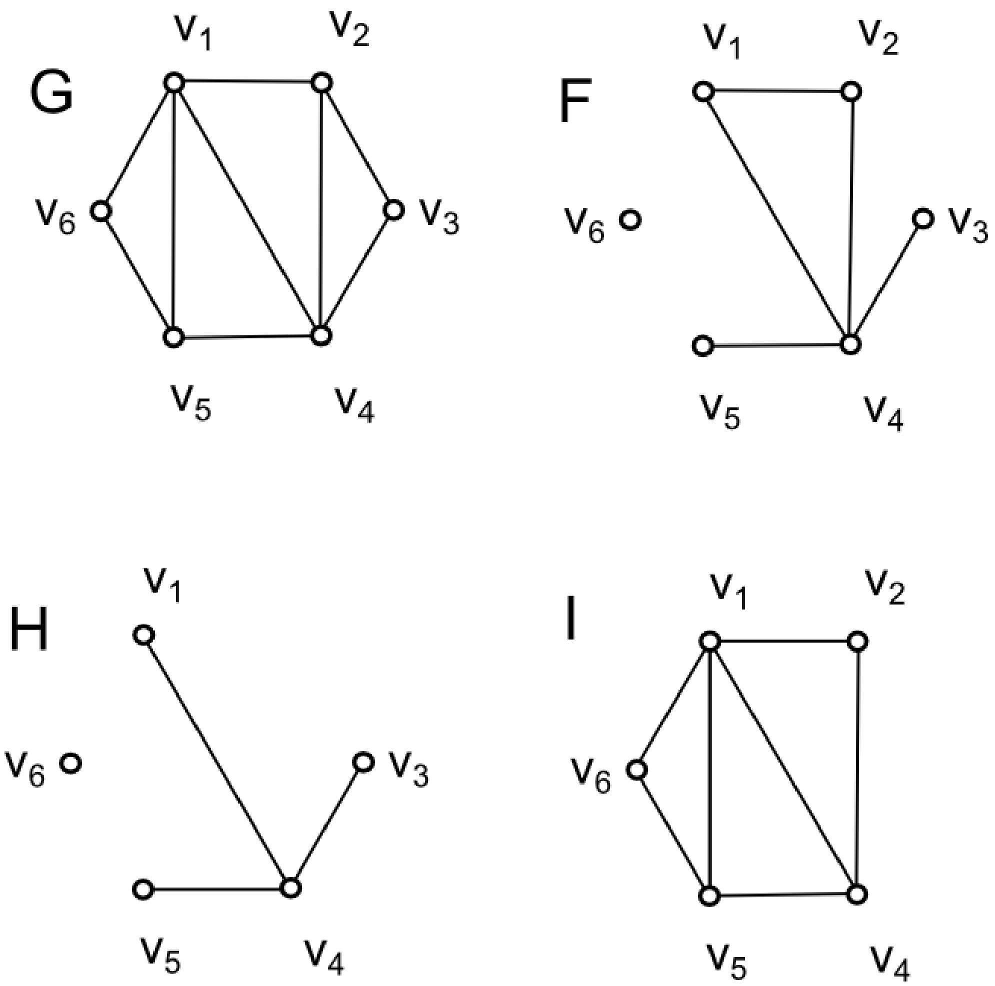
Obr. 3: Graf G, kde $\deg(v_1) = 4, \deg(v_2) = 3, \ldots, \delta(G) = 1, \Delta(G) = 4$

2.3 Podgrafy

Definice 2.3 *Mějme dán graf $G = (V, E)$. Řekneme, že graf $H = (V', E')$ je podgrafem grafu G, jestliže $V' \subseteq V$ a současně $E' \subseteq E$.*

Podgraf, ve kterém platí $V' = V$ (podgraf obsahující všechny vrcholy původního grafu G), nazveme *faktorem* grafu G.

Jestliže $E' \neq E$ nebo $V' \neq V$, pak H nazveme *vlastním podgrafem* grafu G. Pokud vynecháme v grafu G některé vrcholy a všechny hrany, které jsou s nimi incidentní (a jen ty), pak vznikne *indukovaný podgraf* I. V indukovaném podgrafu $I(V', E')$ grafu $G(V, E)$ jsou mezi vrcholy z $V' \subseteq V$ všechny hrany z E (viz obr. 4).



Obr. 4: Graf G a jeho: faktor F, podgraf H a indukovaný podgraf I

2.4 Sledy, tahy a cesty

Definice 2.4 *Sled v grafu G je taková posloupnost vrcholů a hran*

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n),$$

že hrana e_i, pro $i = 1, 2, \ldots, n$, má koncové vrcholy v_{i-1} a v_i. Takový sled můžeme také nazvat (v_0, v_n)-sledem.

Ve sledu procházíme graf po hranách, přičemž vrcholy i hrany můžeme opakovat vícekrát. *Počátečním* vrcholem (v_0, v_n)-sledu je vrchol v_0 a *koncovým* vrcholem je vrchol v_n. Ostatní existující vrcholy sledu jsou *vnitřní* vrcholy. Je-li $v_0 = v_n$, pak nazveme sled *uzavřeným*. Máme-li jednoduché grafy, nemusíme do zápisu sledu psát hrany (mezi dvěma vrcholy bude vždy nejvýše jedna hrana) a sled pak zapíšeme bez závorek $v_0, v_1, \ldots, v_n$. *Délkou sledu* nazveme počet hran vyskytujících se v daném sledu, včetně započtení opakujících se hran. Budeme-li mít sled délky 0, nazveme jej *triviálním*.

Definice 2.5 *Tah je sled, ve kterém se žádné hrany neopakují. Tah s počátečním vrcholem u a koncovým vrcholem v nazveme (u, v)-tah.*

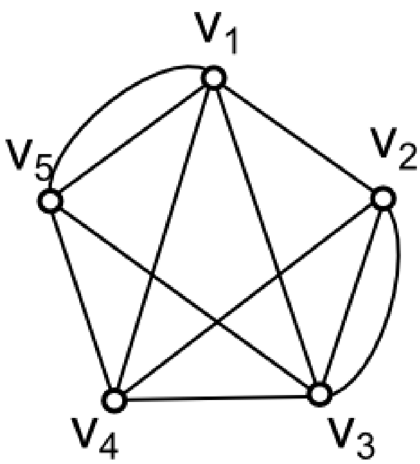
Tah je tedy zvláštním případem sledu, a proto jsou definice počátečních, koncových a vnitřních vrcholů analogické. Totéž platí pro definici délky tahu, s tím rozdílem, že se zde nevyskytují opakující se hrany. Pokud počáteční vrchol splývá s koncovým vrcholem tahu, nazveme takový tah *uzavřeným tahem*.

Definice 2.6 *Cesta je sled, ve kterém se žádné vrcholy neopakují. Cestu s počátečním vrcholem u a koncovým vrcholem v nazveme (u, v)-cesta. Cesty značíme P (z angl. path).*

V cestě se neopakují hrany ani vrcholy. Výjimkou je *cyklus* (tzv. *uzavřená cesta*). Každá cesta na n vrcholech má délku $n - 1$.

Věta 2.1 *Mezi vrcholy $u, v \in V(G)$ existuje (u, v)-sled právě tehdy, když v G existuje (u, v)-cesta.*

Na obr. 5 máme ukázku sledu, tahu a cesty: posloupnost $v_1, v_5, v_4, v_3, v_2, v_4, v_1, v_5, v_3, v_2, v_1, v_3$ je (v_1, v_3)-sled (ve sledu se opakují např. hrany v_1v_5 nebo v_2v_3), posloupnost $v_2, v_4, v_5, v_3, v_1, v_4, v_3, v_2, v_1, v_5$ je (v_2, v_5)-tah (v tahu se opakují např. vrcholy v_3 a v_4) a posloupnost v_5, v_1, v_2, v_3, v_4 je (v_5, v_4)-cesta.



Obr. 5: Ilustrace sledu, tahu a cesty

2.5 Souvislost grafu

Definice 2.7 *Vrchol v je dosažitelný z vrcholu u v grafu G, pokud v G existuje (u, v)-sled. Graf G je souvislý, jestliže pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V(G)$ existuje (u, v)-sled. V opačném případě je graf G nesouvislý.*

Jinými slovy, souvislý graf je takový graf, ve kterém jsou z libovolně zvoleného vrcholu dosažitelné všechny ostatní vrcholy.

Vzdálenost vrcholu u od vrcholu v $(u \neq v)$ je délka nejkratší cesty z vrcholu u do vrcholu v. Označíme ji $d(u, v)$, popř. $d_G(u, v)$.

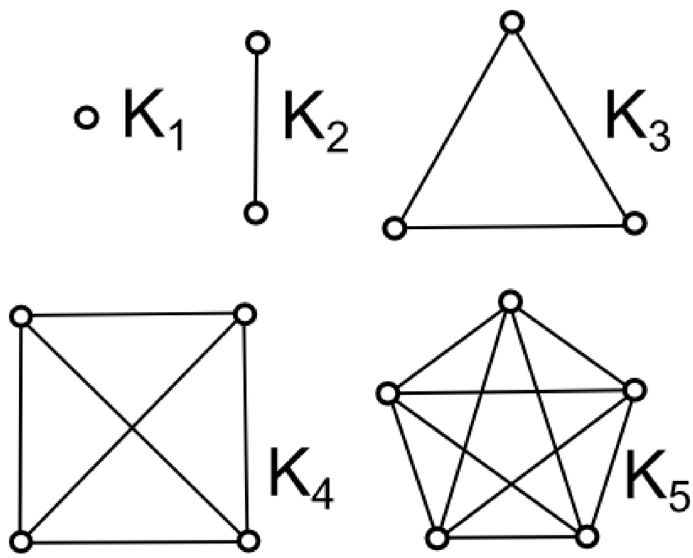
2.6 Důležité třídy grafů

Definice 2.8 *Cyklus nazveme graf s množinou vrcholů $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, pro $n \leq 3$, a množinou hran $E = \{x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_nx_1\}$. Cykly značíme C_n.*

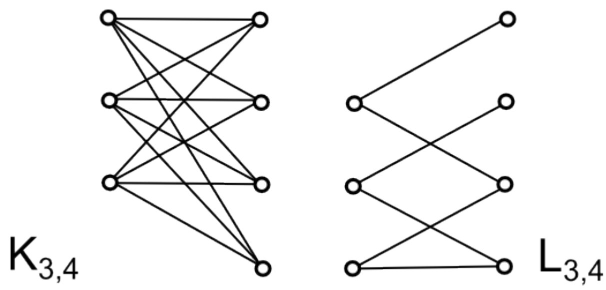
Definice 2.9 *V úplném grafu nebo také kompletním grafu na n vrcholech jsou každé dva vrcholy sousední. Kompletní graf značíme K_n.*

Definice 2.10 *Kompletní bipartitní graf je takový graf, jehož vrcholová množina V je sjednocením dvou neprázdných disjunktních vrcholových množin U, W, a jehož hranová množina $E = \{uw : u \in U \wedge w \in W\}$. Kompletní bipartitní graf značíme $K_{m,n}$, je-li $|U| = m$ a $|W| = n$.*

Množiny U a W se nazývají *partity* kompletního bipartitního grafu. *Bipartitní graf* je každý podgraf kompletního bipartitního grafu. V podgrafu bipartitního grafu můžeme požadovat, aby obsahoval alespoň jeden vrchol z každé partity kompletního bipartitního grafu. Mezi další důležité třídy grafů patří tzv. pravidelné grafy, které jsou popsány v předcházejícím textu a *triviální graf* obsahující jediný vrchol a žádnou hranu, tzn. můžeme jej chápat také jako K_1 (viz obr. 6 a 7).



Obr. 6: Příklady kompletních grafů



Obr. 7: Kompletní bipartitní graf a bipartitní graf

2.7 Stromy a kostry

Acyklický graf je graf, kde žádný jeho podgraf není cyklem. Acyklický souvislý graf nazýváme *stromem*. Stromem je souvislý graf, který má při daném počtu vrcholů nejmenší počet hran. Stromy značíme T (z angl. *tree*).

Věta 2.2 *Nechť T je graf na n vrcholech. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(0) T je strom,

(1) T je acyklický a souvislý,

(2) T je acyklický a má $n - 1$ hran,

(3) T je souvislý a má $n - 1$ hran,

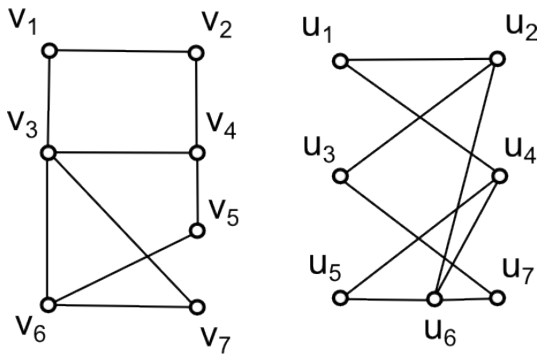
(4) T je souvislý a vynecháním jakékoli hrany porušíme jeho souvislost.

Vrcholy, které mají stupeň 1, nazýváme *listy*. Ve stromu máme mezi každými dvěma vrcholy pouze jednu cestu. Podgraf S grafu G, který je stromem a platí $V(S) = V(G)$, nazýváme *kostrou grafu G*.

2.8 Izomorfismus grafů

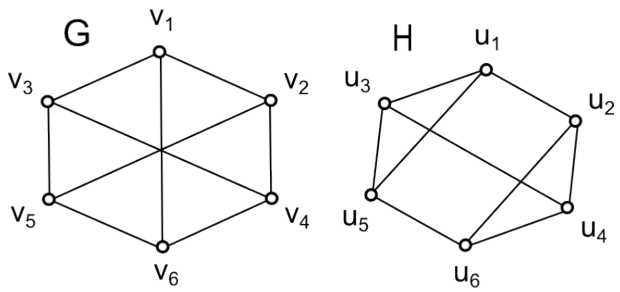
Definice 2.11 *Grafy $G(V, E)$ a $H(U, F)$ nazveme izomorfními (značíme $G \cong H$), jestliže existuje takové prosté zobrazení ϕ množiny V na množinu U, že pro každé dva vrcholy $v_i, v_j \in V$ existují vrcholy $u_r, u_s \in U$ takové, že $u_r = \phi(v_i), u_s = \phi(v_j)$ a hrana $u_r u_s = \phi(v_i)\phi(v_j)$ patří do množiny F právě tehdy, když hrana $v_i v_j$ patří do množiny E.*

Je tedy zjevné, že hledané zobrazení zachovává sousednost i nesousednost vrcholů. Jsou-li vrcholy sousední v G, pak jsou jejich obrazy sousední v H a naopak. Obrazy nesousedních vrcholů budou nezávislé. Platí-li, že $G \cong H$, pak se může stát, že jejich diagramy vypadají jinak, ale jejich struktura je stejná (viz obr. 8).



Obr. 8: Izomorfní grafy G a H s izomorfismem $\phi(v_1) = u_7, \phi(v_2) = u_3, \phi(v_3) = u_6, \phi(v_4) = u_2, \phi(v_5) = u_1, \phi(v_6) = u_4, \phi(v_7) = u_5$

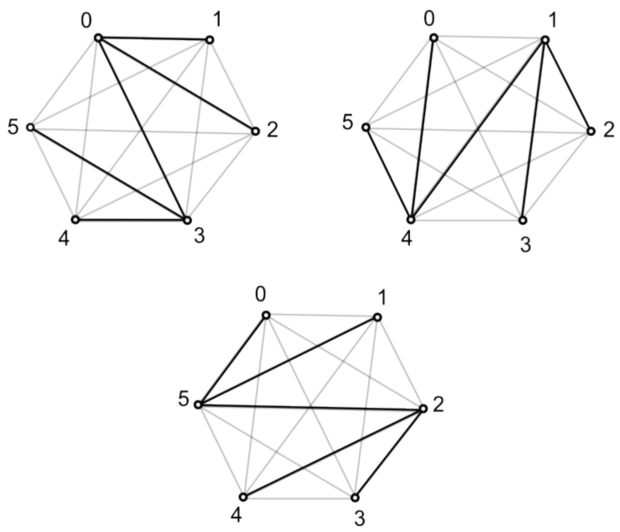
Každé dva izomorfní grafy G a H mají stejný počet vrcholů a hran, stejné stupňové posloupnosti a pokud obsahuje graf G podgraf I, pak H obsahuje podgraf I' izomorfní s I.



Obr. 9: Příklad neizomorfních grafů G a H (H obsahuje C_3 narozdíl od G)

3 Rozklady a faktorizace grafů

Definice 3.1 *Mějme graf H na n vrcholech. Dekompozice grafu H je množina navzájem hranově disjunktních podgrafů $G_1, G_2, \ldots, G_s$ grafu H taková, že každá hrana grafu H je obsažena právě v jednom podgrafu G_r, kde $r \in \{1, 2, \ldots, s\}$ (viz obr. 11). Jestliže je každý podgraf G_r izomorfní s grafem G, pak se jedná o G-dekompozici grafu H. Jestliže je G souvislý faktor H, pak G-dekompozici nazveme G-faktorizace (viz obr. 10).*



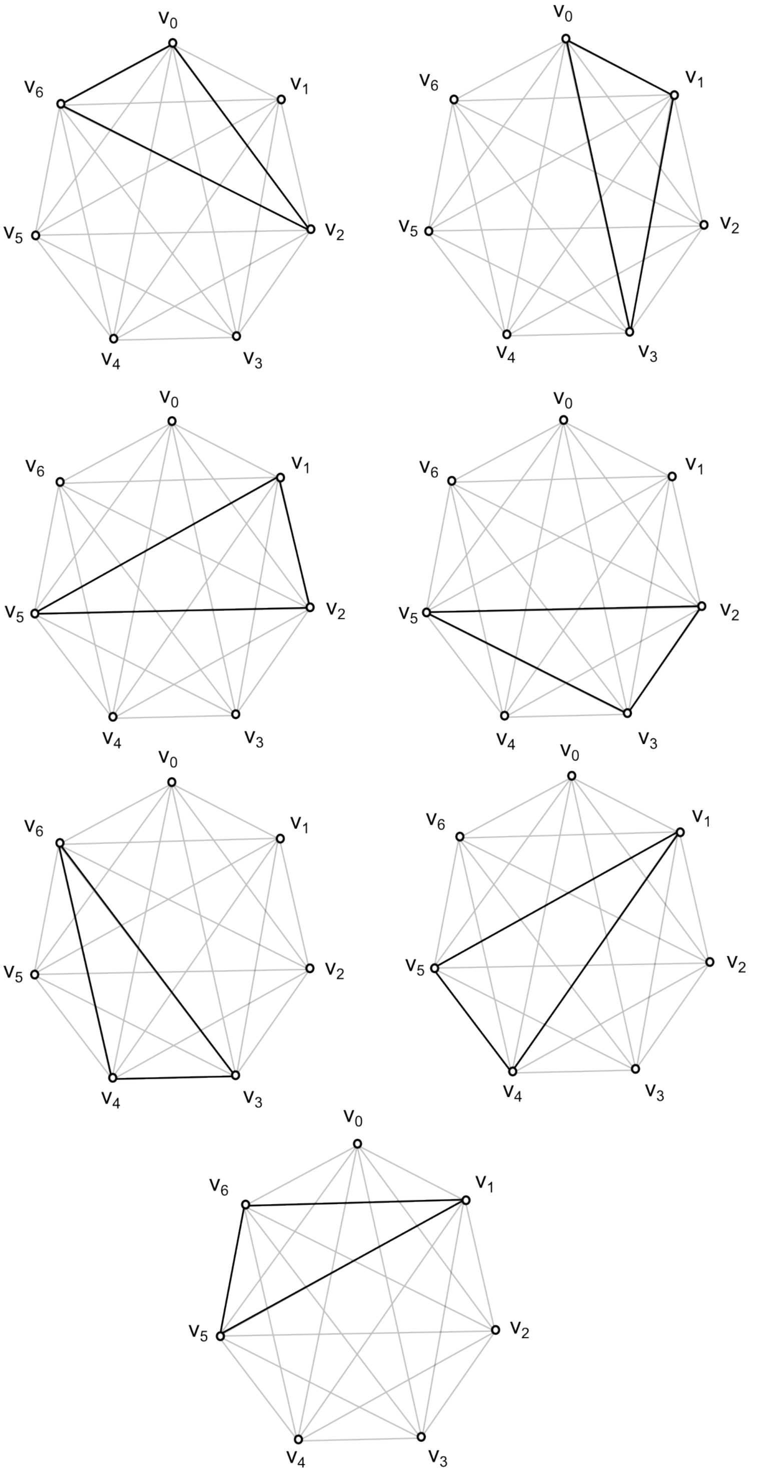
Obr. 10: Cyklická G-faktorizace kompletního grafu K_6, je-li G dvojhvězda na 6 vrcholech

3.1 Nutné podmínky dekompozice

Pro G-dekompozici daného grafu H existuje několik zřejmých podmínek. Počet hran $|E(G)|$ musí dělit počet hran $|E(H)|$, protože každá hrana grafu H patří právě do jedné kopie grafu G. Existují také omezení pro stupňovou posloupnost grafu G. Počet kopií G v grafu H označme jako $k = |E(H)|/|E(G)|$. V multimnožině D se stupeň vrcholu grafu G objevuje právě k-krát. Tato multimnožina musí být rozložitelná na multimnožiny D_i, pro $i = 1, 2, \ldots, |V(G)|$, a to tak, aby součet stupňů v každé multimnožině D_i odpovídal stupni vrcholu $w_i \in V(H)$.

Definice 3.2 *G-dekompozice grafu H s n vrcholy na podgrafy $G_0, G_1, \ldots, G_s$ je cyklická, pokud existuje uspořádání $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ vrcholů v grafu H a pokud existuje izomorfismus ϕ_i : $G_0 \to G_i$, pro $i = 1, 2 \ldots, s$, takový, že $\phi_i(x_j) = x_{j+i}$ pro každé $j = 0, 1, \ldots, n-1$, přičemž součty $j + i$ jsou brány modulo n a $|E(H)|/|E(G)| = s + 1$ (viz obr. 11).*

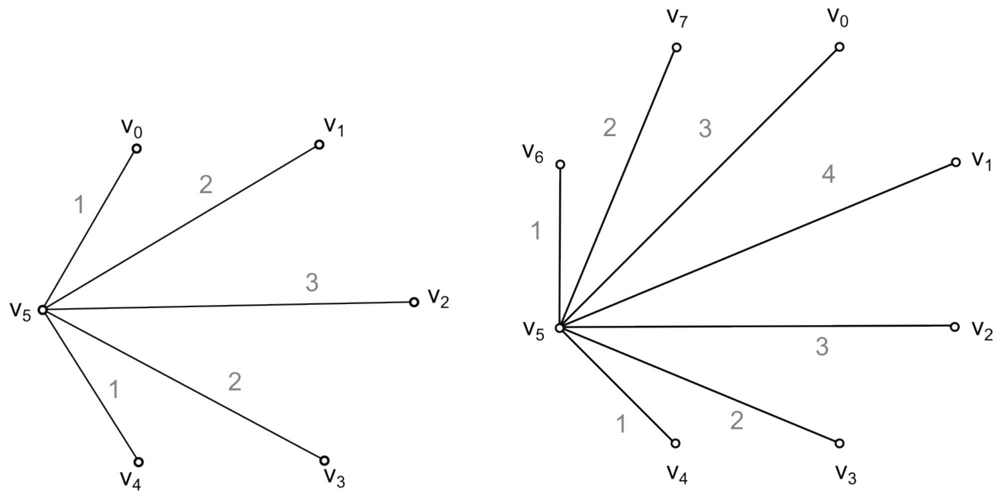
Z definice cyklické G-dekompozice plyne, že jakmile najdeme vhodné umístění pro kopii G_0 grafu G v grafu H, pak ostatních s kopií grafu G získáme postupnou rotací grafu G_0 (postupným přičítáním jedniček k indexům vrcholů v G_0) v grafu H.



Obr. 11: Cyklická G-dekompozice grafu H, je-li $G \cong C_3$ a $H \cong K_7$

3.2 Postačující podmínky dekompozice

Zatím nejsou známy žádné zcela obecné postačující podmínky pro dekompozici, tzn. pro graf G rozkládající graf H, a to ani v případě, že je graf H kompletní. Z tohoto důvodu byly postačující podmínky určeny pouze pro některé třídy grafů G. Zabývat se dále budeme pouze grafy $H \cong K_n$, kde n je přirozené číslo. V teorii grafů problém existence G-dekompozice kompletního grafu převádíme na problém existence určitého *ohodnocení* daného grafu G. Pokud chceme vysvětlit dekompozici kompletních grafů pomocí ohodnocení, musíme v kompletních grafech zavést následující označení. Jednotlivé vrcholy kompletního grafu K_n označíme $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$. Délka hrany $v_i v_j$ v cyklu $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ je menší z čísel $|j-i|, n-|j-i|$ (viz obr. 12). Kompletní grafy s lichým počtem vrcholů mají vždy n hran délky l, pro $l = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Kompletní grafy se sudým počtem vrcholů mají vždy n hran délky l, pro $l = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ a přesně $\frac{n}{2}$ hran délky $\frac{n}{2}$. Ohodnocení grafu G můžeme obecně nazvat zobrazením, které přiřazuje celá čísla (obvykle nezáporná) vrcholům nebo hranám, nebo vrcholům i hranám. Dále budeme pracovat výhradně s takovými ohodnoceními, které přiřazují celá nezáporná čísla vrcholům, přičemž z ohodnocení vrcholů odvozujeme ohodnocení hran (délky hran) dle stanovených pravidel.



Obr. 12: Příklad označení vrcholů v K_6, K_8 a délek hran incidentních s vrcholem v_5

Definice 3.3 *Mějme graf G s množinou vrcholů $V(G)$ a m hranami. Nechť λ je prosté zobrazení $\lambda : V(G) \to S$, kde S je podmnožinou množiny $\{0, 1, 2, \ldots, 2m\}$. Délku hrany xy definujeme jako $l(xy) = \min\{|\lambda(x) - \lambda(y)|, 2m + 1 - |\lambda(x) - \lambda(y)|\}$. Množinu ohodnocení všech vrcholů pak označíme $\lambda(V(G))$.*

Neboť ohodnoceními chceme zajistit G-dekompozici kompletního grafu, požadujeme, aby každá délka hrany kompletního grafu byla v G zastoupena právě jednou. V roce 1967 Rosa ([18]) nadefinoval $\alpha, \beta, \sigma, \rho$-ohodnocení pomocí podmínek uvedených níže. Pro graf s m hranami platí:

(0) Množina ohodnocení vrcholů $\lambda(V(G)) \subseteq \{0, 1, \ldots, m\}$.

(1) Množina ohodnocení vrcholů $\lambda(V(G)) \subseteq \{0, 1, \ldots, 2m\}$.

(2) Množina $\{|\lambda(x) - \lambda(y)| : xy \in E(G)\} = \{1, 2, \ldots, m\}$.

(3) Množina hranových délek $\{l(x, y) : xy \in E(G)\} = \{1, 2, \ldots, m\}$.

(4) Existuje $a \in \{0, 1, \ldots, m\}$ takové, že pro všechny hrany $xy \in E(G)$, kde $\lambda(x) < \lambda(y)$, platí $\lambda(x) \leq a < \lambda(y)$.

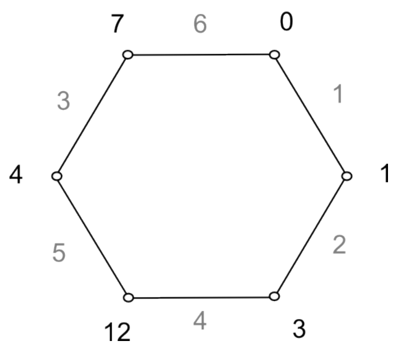
Potom

- α-ohodnocení splňuje (0), (2), (4),
- β-ohodnocení splňuje (0), (2),
- σ-ohodnocení splňuje (1), (2),
- ρ-ohodnocení splňuje (1), (3).

$\alpha, \beta, \sigma, \rho$-ohodnocení jsou uspořádany tak, že jakmile G můžeme ohodnotit některým ohodnocením (např. β), pak jej můžeme ohodnotit i následujícími ohodnoceními (tzn. např. σ, ρ). Jednotlivá ohodnocení jsou detailněji vysvětlena níže.

α-ohodnocení

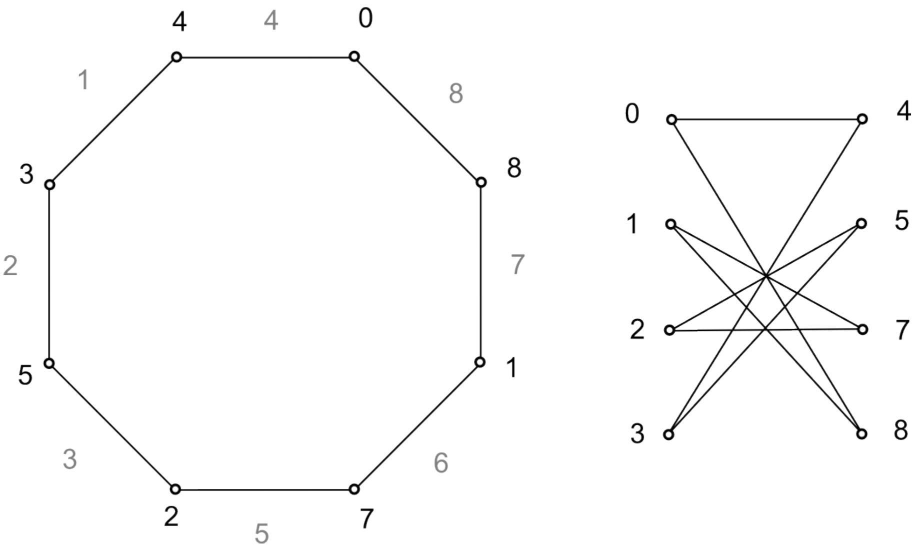
Jen bipartitní graf může mít α-ohodnocení (viz obr. 14). Ovšem to, že je graf bipartitní, nezajišťuje existenci α-ohodnocení, což můžeme vidět např. na bipartitních cyklech délky $n \equiv 2 \pmod 4$, které α-ohodnocení nemají.



Obr. 13: ρ-ohodnocení v C_6

V [18] Rosa dokázal následující postačující podmínku pro dekompozici kompletních grafů.

Věta 3.1 *Pokud graf G s m hranami umožňuje α-ohodnocení, potom existuje cyklická G-dekompozice kompletního grafu K_{2km+1}, kde k je libovolné přirozené číslo.*



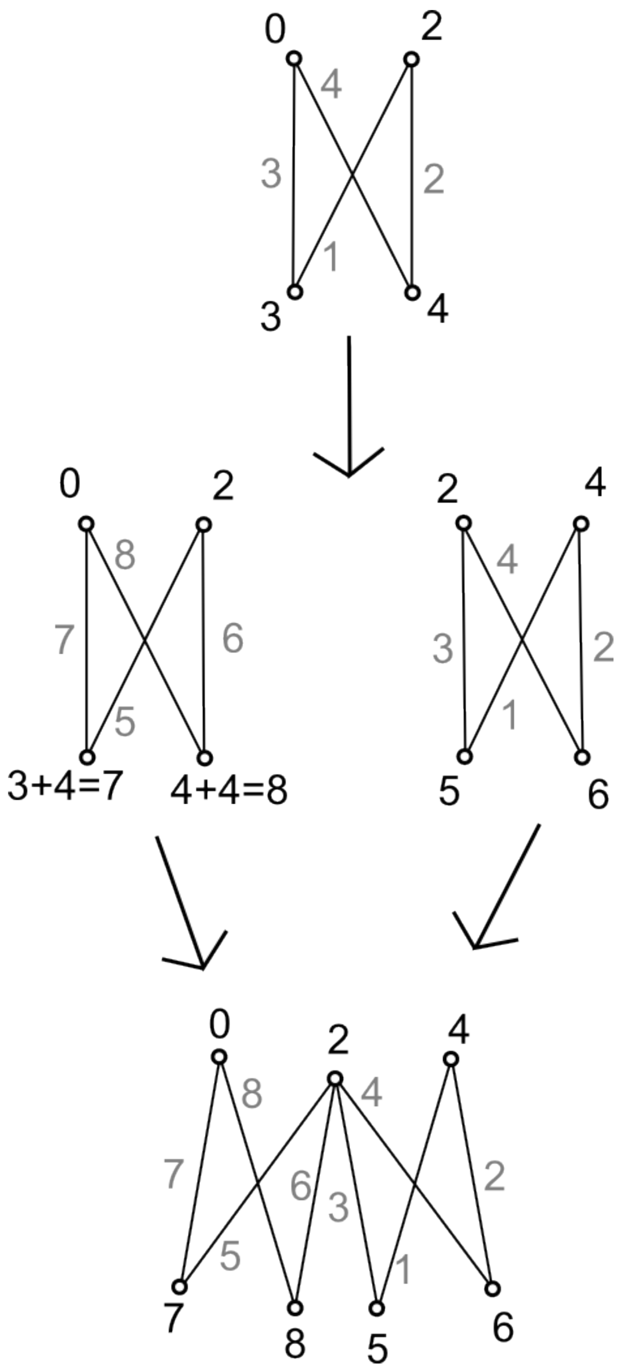
Obr. 14: α-ohodnocení cyklu C_8, kde $a = 3$

Na obr. 15 je α-ohodnocení dvou kopií cyklů C_4 sdílející právě jeden vrchol. Chceme ukázat, že graf G umožňuje cyklickou dekompozici grafu K_{2km+1} pro $k = 2, m = 4$, tedy K_{17}. G obsahuje každou hranu délky l, pro $l = 1, 2, \ldots, 8$, právě jednou. Když provedeme jeho otočení 8-krát, pak kopie, které vznikly z grafu G, pokryjí osm hran každé délky l v kompletním grafu K_{17} (délky hran se při otáčení nemění). K_{17} má od každé délky l právě 8 hran. Z toho plyne, že existuje cyklická G-dekompozice K_{17}. Jelikož se graf G skládá ze dvou hranově disjunktních kopií C_4, tak existuje také C_4-dekompozice K_{2km+1}, pro $k = 2$ a $m = 4$.

β, σ, ρ-ohodnocení

Nejobecnějším ohodnocením, které zaručuje existenci G-dekompozice, je ρ-ohodnocení. V [18] dokázal Rosa následující nutnou a postačující podmínku:

Věta 3.2 *Nechť G je graf s m hranami, pak cyklická G-dekompozice kompletního grafu K_{2m+1} existuje právě tehdy, když G umožňuje ρ-ohodnocení.*



Obr. 15: Ukázka α-ohodnocení pro dvě kopie cyklu C_4, sdílející jeden vrchol (2)

3.3 Nutné podmínky faktorizace

Speciálním případem G-dekompozice je G-faktorizace. Nutné podmínky G-faktorizace jsou tudíž přísnější než nutné podmínky G-dekompozice (které jsme zmínili v předešlé kapitole). Pokud chceme, aby byla G-faktorizace grafu K_n možná, musí všechny multimnožiny D_i (viz předešlá kapitola) mít stejnou velikost k, kde k značí počet izomorfních faktorů s podgrafem G grafu K_n. Jelikož stupeň každého vrcholu x v každém G_i je minimálně 1, tak nejvyšší stupeň $\Delta(G)$ musí být roven nejvýše $n - k$. Tato podmínka se nazývá *stupňová podmínka*.

Necht' T je kostra grafu K_n, potom T je strom na n vrcholech s $m = n - 1$ hranami. Jelikož

$$|E(K_n)| = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1),$$

tak n musí být sudé $n = 2t$, v opačném případě by měl kompletní graf $\frac{n}{2}$ faktorů, kde n je liché, což ale není možné. Pokud je $n = 2t$, pak T-faktorizace obsahuje přesně t faktorů. V T je potom nejvyšší stupeň vrcholu $n - k = 2t - t = t$.

3.4 Postačující podmínky faktorizace

Postačující podmínky faktorizace zůstávají zatím stále relativně neprozkoumané. Kromě triviální faktorizace K_{2n} na hamiltonovské cesty a faktorizace na dvojhvězdy (dvojhvězda vznikne tak, že mezi centrální vrcholy dvou hvězd $K_{1,n-1}$ přidáme hranu) jsou všechny postačující podmínky faktorizací na kostry založeny na ohodnocení. Mezi tato ohodnocení patří ρ-symetrické ohodnocení, smíšené ρ-ohodnocení a přepínací ohodnocení, kterými se budeme zabývat níže.

Definice 3.4 *G-dekompozice grafu H na $2n$ vrcholech na $G_0, G_1, \ldots, G_s$ je bicyklická, jestliže existuje uspořádání $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ vrcholů H a izomorfismus $\phi_i : G_0 \to G_i$, pro $i = 1, 2, \ldots, s$, takový, že $\phi_i(x_j) = x_{j+i}$ a $\phi_i(y_j) = y_{j+i}$ pro každé $j = 0, 1, \ldots, n-1$, kde součty $j + i$ jsou brány modulo n.*

Podle definice 3.4 víme, že musíme $2n$ vrcholů grafu H rozdělit do dvou stejně velkých množin, např. X a Y, kde $|X| = |Y| = n$, dále musíme vhodně umístit kopii G_0 a zbývající kopie grafu G získáme díky postupnému otáčení G_0 tak, že vrcholy z G_0, umístěné do X, rotujeme v rámci X a vrcholy z G_0, umístěné do Y, rotujeme v rámci Y.

3.4.1 Faktorizace kompletního bipartitního grafu

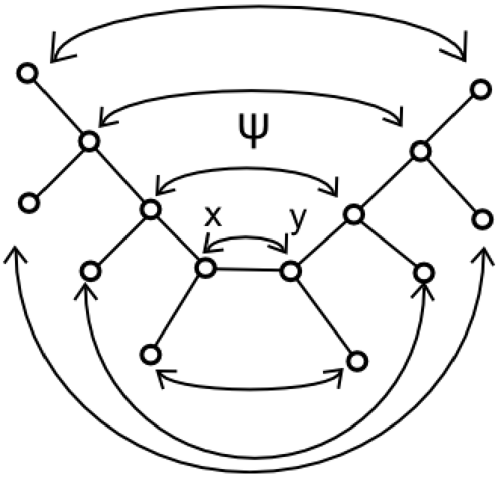
Bipartitní ρ-ohodnocení bylo zavedeno Frončkem pro dekompozici pravidelných kompletních bipartitních grafů. Hranu xy, tedy hranu mezi vrcholy x a y, budeme pro případ ohodnocení vrcholů čísly $\lambda(x)$ a $\lambda(y)$ označovat $(\lambda(x), \lambda(y))$.

Definice 3.5 *Nechť G je bipartitní graf s množinou vrcholů $V(G) = X_0 \cup X_1$ a n hranami. Dále nechť je λ prosté zobrazení $\lambda : X_i \to S_i$, kde S_i je podmnožinou množiny $V_i = \{0_i, 1_i, \dots, (n-1)_i\}$, pro $i = 0, 1$. Pak je délka hrany (x_0, y_1) pro $x_0 \in V_0$ a $y_1 \in V_1$ definována jako $l_{01}(x_0, y_1) = y - x$, kde platí, že rozdíl $y - x$ je brán modulo n. Jestliže množina všech délek hran je rovna $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, potom je λ bipartitní ρ-ohodnocení.*

Existence ρ-ohodnocení zaručuje bicyklickou dekompozici kompletního grafu $K_{n,n}$, jak bylo ukázáno v [7].

Věta 3.3 *Nechť má bipartitní graf G s n hranami bipartitní ρ-ohodnocení. Pak existuje bicyklická dekompozice kompletního grafu $K_{n,n}$ na n kopií grafu G.*

Tato věta je důležitá pro ostatní ohodnocení, která umožňují faktorizaci kompletních grafů na kostry.



Obr. 16: Symetrický strom s automorfismem ψ

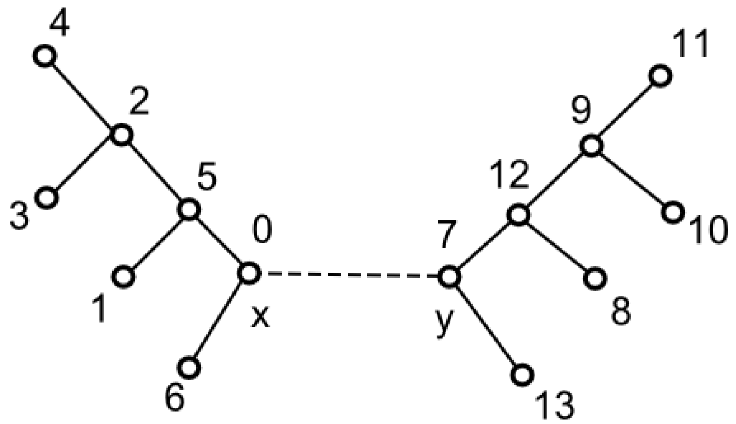
3.4.2 ρ-symetrické ohodnocení

Mějme souvislý graf G s hranou xy (tzv. *mostem*), který je symetrický, pak musí existovat automorfismus ψ grafu G takový, že $\psi(x) = y$ a $\psi(y) = x$. Jelikož hrana xy je most, rozdělí se po odstranění hrany xy symetrický graf G na dvě izomorfní komponenty H a H', kterým říkáme *břehy*.

Následující věta, která je dokázaná ve [4], ukazuje jak ρ-symetrické graciózní ohodnocení může být uplatněno při faktorizaci kompletního grafu na symetrické kostry. Jelikož ρ-symetrické graciózní ohodnocení nebudeme dále potřebovat, popíšeme je jen stručně. Na počátku mají oba izomorfní břehy v symetrickém stromu shodné graciózní ohodnocení. Na druhém břehu přičteme k původnímu ohodnocení vrcholů číslo n (viz obr. 17). Kostra tedy obsahuje dvojice hran délek l, pro $l = 1, 2, \dots, n-1$, a jedinou hranu délky n. Pokud budeme takovou kostru rotovat v K_{2n}, tak hrany jednoho břehu pokryjí hrany délek $1, \ldots, n-1$ v jedné půlce K_{2n}, hrany druhého břehu pokryjí hrany délek $1, \ldots, n-1$ v druhé půlce K_{2n} a hrana xy délky n pokryje všechny hrany délky n v K_{2n}. Následující věta je uvedena ve [4].

Věta 3.4 *Nechť G je symetrický strom s $2n-1$ hranami. Potom existuje cyklická G-dekompozice kompletního grafu K_{2n} právě tehdy, když G má ρ-symetrické graciózní ohodnocení.*

Symetrický strom s $2n$ vrcholy má $2n-1$ hran, z tohoto důvodu je kostrou K_{2n}. Z toho plyne, že symetrický strom na $2n$ vrcholech, který umožňuje ρ-symetrické graciózní ohodnocení, faktorizuje kompletní graf K_{2n}. Symetrie stromu je ale velmi omezující požadavek.



Obr. 17: Symetrický strom s ρ- symetrickým graciózním ohodnocením

3.4.3 Smíšené ρ-ohodnocení

Smíšené ρ-ohodnocení, budeme nazývat krátce jen jako smíšené ohodnocení, bylo uvedeno Frončkem v [7] jako zobecnění ρ-symetrického graciózního ohodnocení.

Definice 3.6 *Nechť je graf G s $V(G) = V_0 \cup V_1$, $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ a $|V_0| = |V_1| = n$. Nechť je λ prosté zobrazení, $\lambda : V_i \to \{0_i, 1_i, \ldots, (2n)_i\}$, pro $i = 0, 1$. Čistá délka hrany (x_i, y_i), kde $x_i, y_i \in V_i$, kde $i \in \{0, 1\}$, pro $\lambda(x_i) = p_i$ a $\lambda(y_i) = q_i$ je definována jako*

$$l_{ii}(x_i, y_i) = \min\{|p-q|, n-|p-q|\}.$$

Smíšená délka hrany (x_o, y_1), kde $x_0 \in V_0, y_1 \in V_1$, pro $\lambda(x_0) = p_0$ a $\lambda(y_1) = q_1$, je definována jako

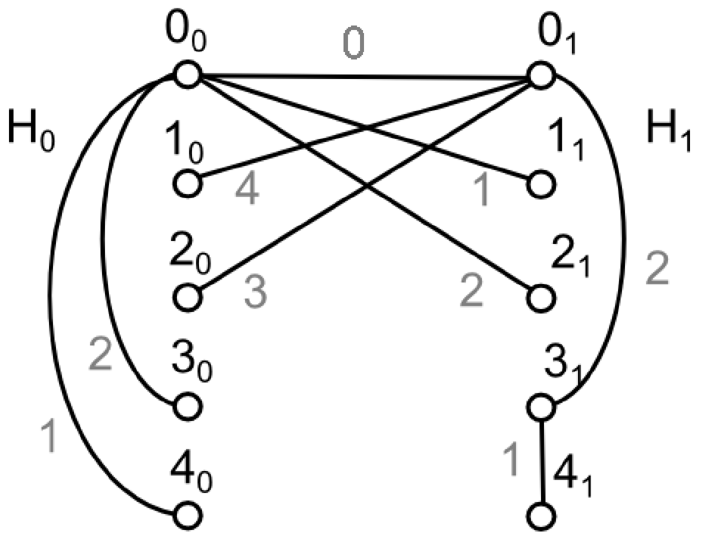
$$l_{01}(x_0, y_1) = q - p \pmod{n},$$

kde $p, q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ jsou ohodnocení vrcholů bez indexu. Hrany (x_i, y_i), kde $i = 0, 1$, s čistou délkou l_{ii} jsou čisté ii-hrany a hrany (x_0, y_1) se smíšenou délkou l_{01} jsou smíšené hrany.

Definice 3.7 *Nechť G je graf se $4n+1$ hranami, $V(G) = V_0 \cup V_1, V_0 \cap V_1 = \emptyset$, a $|V_0| = |V_1| = 2n+1$. Nechť λ je prosté zobrazení $\lambda : V_i \to \{0_i, 1_i, \ldots, (2n)_i\}$, pro $i = 0, 1$ a nakonec nechť délky hran jsou dle def. 3.6. Pak řekneme, že G má smíšené ρ-ohodnocení, pokud:*

1. $\{l_{ii}(x_i, y_i) : (x_i, y_i) \in E(G)\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, *pro* $i = 0, 1$
2. $\{l_{01}(x_0, y_1) : (x_0, y_1) \in E(G)\} = \{0, 1, \ldots, 2n\}$.

Smíšené ohodnocení nevyžaduje symetrii stromu T, ale je zde omezení $|G| \equiv 2 \pmod 4$. Množina vrcholů grafu G, která má smíšené ohodnocení, je rozdělena na dvě stejně velké množiny V_0, V_1 a celý graf G se pak skládá ze tří podgrafů, a to H_0, H_1 a H_{01}, s tím, že H_0 je indukovaný na V_0 (obsahuje n hran), H_1 je indukovaný na V_1 (obsahuje n hran), H_{01} je bipartitní graf s partitami $X_0 \subseteq V_0$ a $X_1 \subseteq V_1$. Dále H_0 sdílí jediný vrchol s H_{01}, taktéž H_1 s H_{01}. H_0 a H_1 splňují podmínky ρ-ohodnocení, H_{01} splňuje podmínky bipartitního ρ-ohodnocení. Z toho lze tedy vyvodit (dokázáno v [7]) následující. Pokud si představíme, že K_{4n+2} je rozdělen na dvě kopie K_{2n+1}, mezi kterými jsou hrany $K_{2n+1,2n+1}$, pak hrany H_0 při bicyklické faktorizaci pokryjí hrany jedné kopie K_{2n+1}, hrany H_1 pokryjí hrany druhé kopie K_{2n+1} a hrany H_{01} pokryjí hrany $K_{2n+1,2n+1}$ (viz obr. 18, obr. 19).

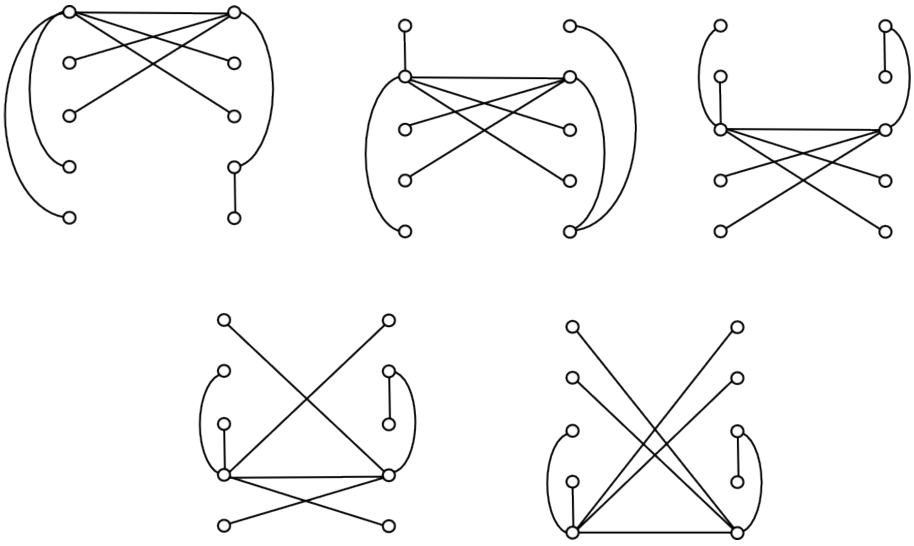


Obr. 18: Strom T se smíšeným ohodnocením

Věta 3.5 *Nechť je G graf s $4n+1$ hranami, který má smíšené ρ-labeling. Potom existuje bicyklická dekompozice kompletního grafu K_{4n+2} na $2n+1$ kopií grafu G.*

3.4.4 Přepínací ohodnocení

V dizertační práci Kovářové [15] bylo uvedeno přepínací ohodnocení, které, narozdíl od smíšenéného ohodnocení, zaručuje faktorizaci kompletních grafů i řádu 0 modulo 4. Důkaz v [15].



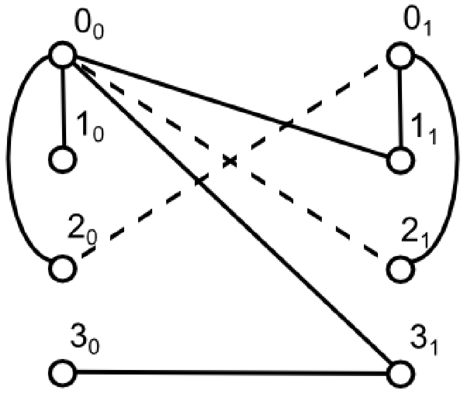
Obr. 19: Bicyklická T-faktorizace K_{10}

Věta 3.6 *Graf G s $4n-1$ hranami má přepínací smíšené ohodnocení, jestliže splňuje následující podmínky:*
Množina vrcholů $V(G) = V_0 \cup V_1, V_0 \cap V_1 = \emptyset$, $|V_0| = |V_1| = 2n$. Nechť je λ prosté zobrazení $\lambda : V_i \to \{0_i, 1_i, \ldots, (2n-1)_i\}$, pro $i = 0, 1$ (délky hran jsou definovany stejně jako v Definici 3.6), potom:

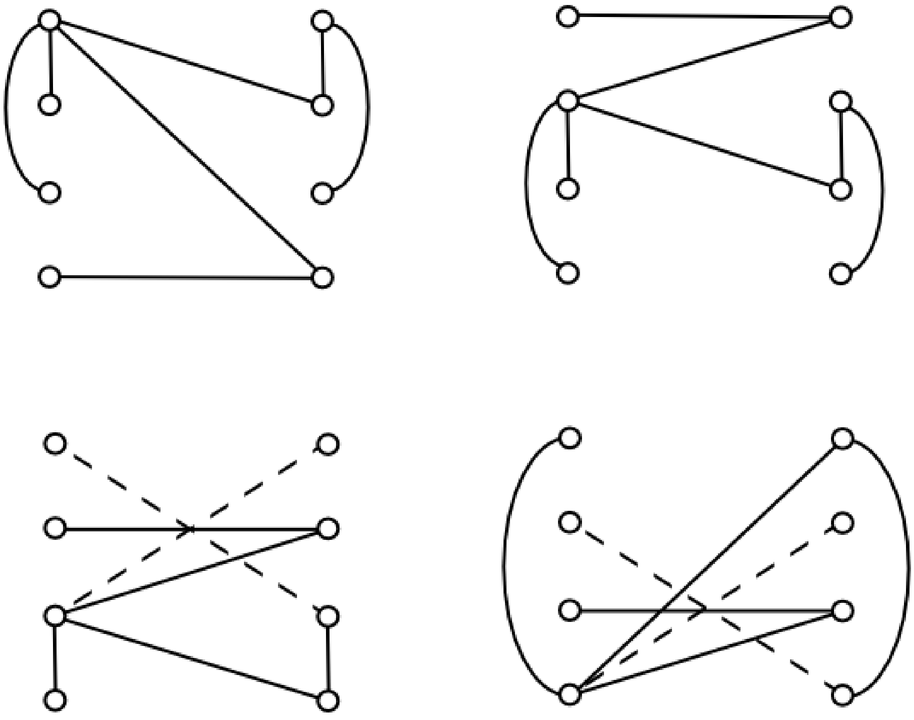
1. $\{l_{ii}(x_i, y_i) : (x_i, y_i) \in E(G)\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, *pro* $i = 0, 1$,
2. *existuje izomorfismus φ takový, že G je izomorfní s G', kde $V(G') = V(G)$ a $E(G') = (E(G) \setminus \{(k_0, (k+n)_0), (l_1, (l+n)_1)\}) \cup \{(k_0, (l+n)_1), ((k+n)_0, l_1)\}$,*
3. $\{l_{01}(x_0, y_1) : (x_0, y_1) \in E(G)\} = \{0, 1, \ldots, 2n-1\} \setminus \{l_{01}(k_0, (l+n)_1), l_{01}((k+n)_0, l_1)\}$.

Věta 3.7 *Nechť G je graf na $4n$ vrcholech s $4n-1$ hranami, mající přepínací smíšené ohodnocení. Potom existuje G-dekompozice kompletního grafu K_{4n} na $2n$ izomorfních kopií G.*

Ukažme si například přepínací ohodnocení housenky $(2, 4, 2, 2)$ (viz kapitola 4) s průměrem 5, kde ve třetím a čtvrtém faktoru budou původní hrany $(0_0, 2_0)$ a $(0_1, 2_1)$ s čistou délkou 2 nahrazeny hranami $(0_0, 2_1)$ a $(0_1, 2_0)$ (ovšem v otočené formě) se smíšenou délkou 2 (viz obr. 20 a 21).



Obr. 20: Přepínací ohodnocení housenky (2,4,2,2)



Obr. 21: Bicyklická faktorizace K_8 na housenky (2,4,2,2)

4 Faktorizace kompletních grafů na housenky s průměrem 6

Již padesát let upoutává pozornost matematiků problém dekompozice kompletního grafu. Tento výzkum byl inspirován známou Ringelovou hypotézou z roku 1963, která říká, že každý strom s m hranami rozkládá kompletní graf K_{2m+1}. Kotzig poté stanovil ještě přísnější hypotézu, a to takovou, že každý strom má graciózní ohodnocení. Tato hypotéza není dosud ani potvrzena ani vyvrácena.

V [13] je uveden skoro úplný a kvalitní přehled výsledků ohledně graciózních a ρ-ohodnocení. V roce 1997 byly uvedeny Eldergillem [4] v jeho diplomové práci nutné a postačující podmínky pro faktorizaci K_{2n} na symetrické kostry. Eldergill zavedl symetrické graciózní ohodnocení, ρ-symetrické graciózní ohodnocení a klasifikoval všechny stromy řádu 10 (rozhodl o všech stromech řádu 10, zda faktorizují či nefaktorizují K_{10}). Další krok učinil Fronček ([6], [7]), který zavedl smíšené ρ-ohodnocení. Díky této metodě našel širší třídu stromů na $4n+2$ vrcholech, které faktorizují K_{4n+2}. Switching ohodnocení, které je postačující pro faktorizaci stromů na $4n$ vrcholech, bylo uvedeno v [12]. ρ-symetrické graciózní ohodnocení i switching ohodnocení vyžadují silný automorfismus faktorizujícího grafu, což značně omezuje jejich použití. Fronček dále nalezl pro každý průměr $3 \leq d \leq 2n-1$ kostru, která faktorizuje K_{4n+2}. Byly také klasifikovány všechny housenky diametru 4 a 5, které musely být rozděleny do mnoha podtříd. Klasifikace všech stromů s nejméně čtyřmi nelistovými vrcholy byla provedena v práci [11]. Vetrik v [20] nalezl některé housenky průměru 6, které faktorizují odpovídající kompletní graf. Klasifikace housenek diametru 3, 4, 5 je kompletní.

Věta 4.1 *Nechť T je libovolný strom s přesně čtyřmi nelistovými vrcholy v_1, v_2, v_3, v_4, přičemž platí* $\deg(v_1) \geq \deg(v_2) \geq \deg(v_3) \geq \deg(v_4) \geq 2$. *Pokud T faktorizuje K_{2n} pak*

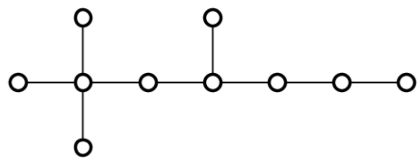
1. *Buďto* $\deg(v_1) = n$ *a* $\deg(v_2) + \deg(v_3) + \deg(v_4) = n + 2$,
2. *nebo* $\deg(v_1) + \deg(v_4) = \deg(v_2) + \deg(v_3) = n + 1$.

Shibatou a Sekim v [19] byl vyřešen problém koster faktorizujících kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$ a nezávisle na nich El-Zanatim a Vanden Eydenem v [5]. Pro všechna celá kladná čísla m, n, pro která platí $m + n - 1$ dělí mn, existuje kostra, která faktorizuje $K_{m,n}$.

Je proto přirozené se začít zabývat faktorizacemi kompletních grafů na kostry s pěti nelistovými vrcholy. Jeden druh koster s pěti nelistovými vrcholy jsou housenky s průměrem 6 (definici uvedeme níže), avšak úplně charakterizovat faktorizace na housenky s průměrem 6 je velmi obtížné, proto jsme se zaměřili pouze na tak zvané 2-housenky (definici uvedeme níže), jejichž vrcholy stupně vyššího než dva jsou sousední.

Housenka s průměrem 6 je strom z něhož po odstranění všech vrcholů stupně 1 vznikne cesta délky 4 (cesta na 5 vrcholech), které říkáme *páteř housenky*. Housence s průměrem 6, která obsahuje nejvýše dva vrcholy stupně 3 a vyššího, budeme říkat 2-*housenka*. Označme vrcholy páteře housenky s průměrem 6 po řadě a, b, c, d, e. Potom je možné takovou housenku jednoznačně popsat pomocí uspořádané pětice $(\deg(a), \deg(b), \deg(c), \deg(d),$

$\deg(e))$. Napíšeme-li $[d_1, d_2, d_3, d_4, d_5]$ pro $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_5$, kde $d_i \in \{\deg(a), \deg(b), \deg(c), \deg(d), \deg(e)\}$ a vždy je pro $i \neq j$, $d_i \neq d_j, j \in [1, 5]$, pak máme na mysli množinu všech housenek s průměrem 6, jejíž páteřní vrcholy mají stejné stupně jako housenka $(\deg(a), \deg(b), \deg(c), \deg(d), \deg(e))$, ale nezáleží na pořadí vrcholů na páteři (ukázku vidíme na obr. 22 a obr. 23).

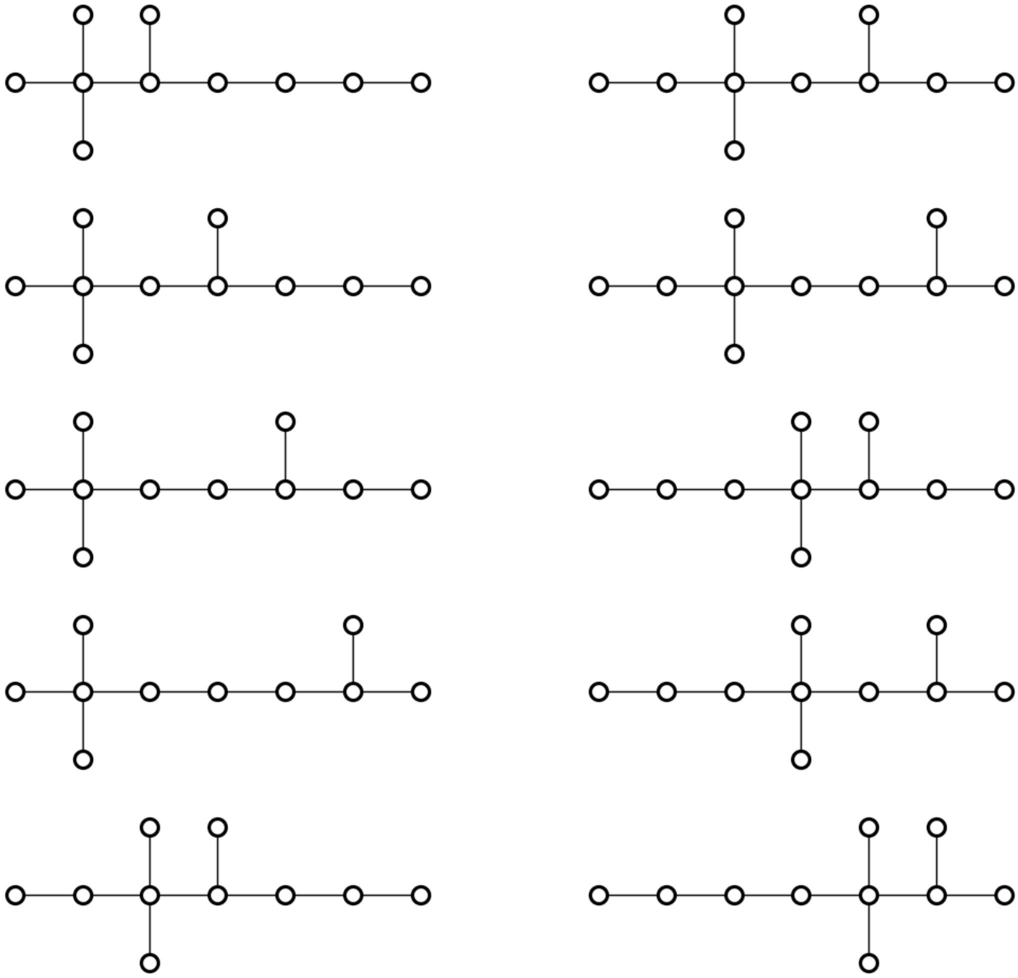


Obr. 22: Housenka $(4, 2, 3, 2, 2)$

Každá housenka H s průměrem 6 obsahuje diametrickou cestu délky 6. Má-li faktorizovat kompletní graf, pak musí splňovat dvě následující nutné podmínky. $|V(H)| = 2n$ a pro každý vrchol $v \in V(H)$ musí platit $\deg(v) \leq n$. Uvažujeme-li 2-housenky, pak $2n - 7$ listů, které nejsou koncové vrcholy diametrické cesty musíme napojit do nějakých dvou interních vrcholů diametrické cesty, které jsou stupně 2. Proto máme dvě možnosti: Buď do jednoho interního vrcholu napojíme $n - 2$ listů a do druhého $n - 5$ listů nebo do jednoho napojíme $n - 3$ listů a do druhého $n - 4$ listů. V ostatních případech by 2-housenka obsahovala vrchol stupně vyššího než n. Proto se budeme zabývat jen 2-housenkami typu $[n, n-3, 2, 2, 2]$ a $[n-1, n-2, 2, 2, 2]$, u ostatních 2-housenek je faktorizace K_{2n} vyloučena, neboť nesplňují stupňovou podmínku.

Ve všech obrázcích je levá množina vrcholů množina V_0, přičemž vrcholy jsou označeny po řadě $0_0, 1_0, \ldots, (2k)_0$, a pravá množina je množina V_1, s vrcholy označenými po řadě $0_1, 1_1, \ldots, (2k)_1$.

Všechny následující důkazy jsou konstruktivní. Pokud uvádíme rostoucí posloupnost ohodnocení vrcholů, kde pro jisté konkrétní k je první člen posloupnosti větší než poslední, pak takovou posloupnost pro dané k považujeme za prázdnou. Pokud uvádíme klesající posloupnost ohodnocení vrcholů, kde pro jisté konkrétní k je první člen posloupnosti menší než poslední, pak takovou posloupnost pro dané k považujeme za prázdnou.

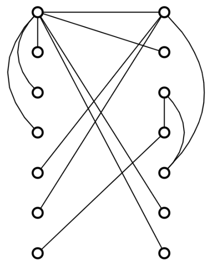


Obr. 23: Množina neizomorfních housenek $[4, 3, 2, 2, 2]$

Lemma 1. 1 *2-housenka* $(n, n-3, 2, 2, 2)$ *umožňuje smíšené ohodnocení pro každé liché* $n \geq 7$.

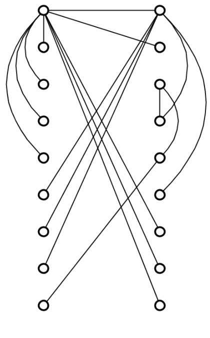
Důkaz. Nechť $n = 2k+1$, $k \geq 3$. Důkaz rozdělíme do 3 případů, a to pro $k = 3$, $k = 4$ a $k \geq 5$.

- Nechť $k = 3$.
  2-housenka H $(7, 4, 2, 2, 2)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, 1_0)$, $(0_0, 2_0)$, $(0_0, 3_0)$ délek 1, 2 a 3.
  Dále obsahuje cestu $0_1, 4_1, 2_1, 3_1, 6_0$ s čistými 11-hramani délek 3, 2, 1 a smíšenou hranou délky 4.
  H také obsahuje smíšené hrany $(0_0, 0_1)$ délky 0, $(0_0, 1_1)$ délky 1, $(0_0, 5_1)$ délky 5, $(0_0, 6_1)$ délky 6, $(4_0, 0_1)$ délky 3 a $(5_0, 0_1)$ délky 2.



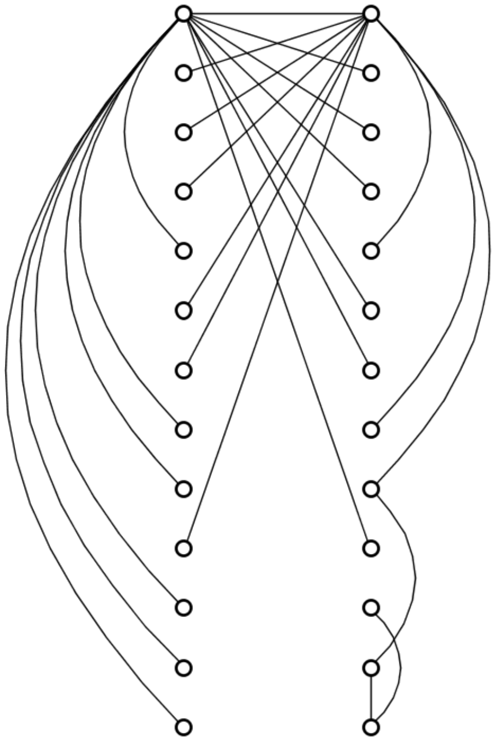
Obr. 24: Konstrukce pro $k = 3$

- Nechť $k = 4$.
  2-housenka H $(9, 6, 2, 2, 2)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, 1_0)$, $(0_0, 2_0)$, $(0_0, 3_0)$, $(0_0, 4_0)$ délek 1, 2, 3 a 4, čistou 11-hranu $(0_1, 5_1)$ délky 4.
  Dále obsahuje cestu $0_1, 3_1, 2_1, 4_1, 8_0$ s čistými 11-hranami délek 3, 1, 2 a smíšenou hranou délky 5.
  H také obsahuje smíšené hrany $(0_0, 0_1)$ délky 0, $(0_0, 1_1)$ délky 1, $(0_0, 6_1)$ délky 6, $(0_0, 7_1)$ délky 7, $(0_0, 8_1)$ délky 8, $(5_0, 0_1)$ délky 4, $(6_0, 0_1)$ délky 3 a $(7_0, 0_1)$ délky 2.



Obr. 25: Konstrukce pro $k = 4$

- Nechť $k \geq 5$.
  2-housenka H $(2k+1, 2k-2, 2, 2, 2)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, x_0)$ pro $x = 2k, 2k-1, 2k-2, 2k-4, 2k-5, \ldots, k+2, k+1$ (vynechán vrchol $(2k-3)_0$) délek $1, 2, 3, 5, 6, \ldots, k-1, k$ a čistou 00-hranu $(0_0, 4_0)$ délky 4.
  H dále obsahuje cestu $0_1, (2k-4)_1, (2k-1)_1, (2k)_1, (2k-2)_1$ s čistými 11-hranami délek $5, 3, 1, 2$, čisté 11-hrany $(0_1, y_1)$ pro $y = 2k-5, 2k-6, \ldots, k+1$ délek $6, 7, \ldots, k$ a čistou 11 hranu $(0_1, 4_1)$ délky 4.
  Nakonec uveďme smíšené hrany $(0_0, z_1)$ pro $z = 1, 2, 3, 5, 6, \ldots, k$ (vynechán vrchol 4_1) délek $1, 2, 3, 5, 6, \ldots, k$, smíšené hrany $(u_0, 0_1)$ pro $u = 1, 2, 3, 5, 6, \ldots, k$ délek $2k, 2k-1, 2k-2, 2k-4, 2k-5, \ldots, k+1$, hranu $(0_0, (2k-3)_1)$ délky $2k-3$, hranu $((2k-3)_0, 0_1)$ délky 4 a nakonec hranu $(0_0, 0_1)$ délky 0.



Obr. 26: Konstrukce pro $k = 6$

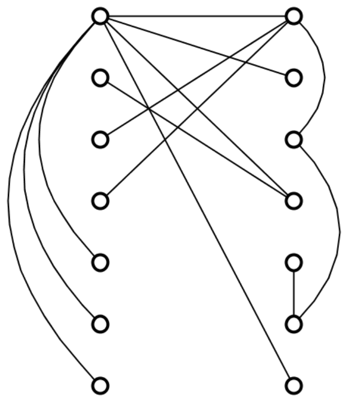
Snadno ověříme, že popsané hrany jsou skutečně hrany 2-housenky H $(2k+1, 2k-2, 2, 2, 2)$ (vrchol 0_0 má stupeň $2k+1$, 0_1 má stupeň $2k-2$ a vrcholy $(2k-4)_1, (2k-1)_1, (2k)_1$ jsou zbylé vrcholy páteře). Tudíž H má smíšené ohodnocení pro každé $k \geq 3$.

■

Lemma 1. 2 *2-housenka $(2, n, n-3, 2, 2)$ umožňuje smíšené ohodnocení pro každé liché $n \geq 7$.*

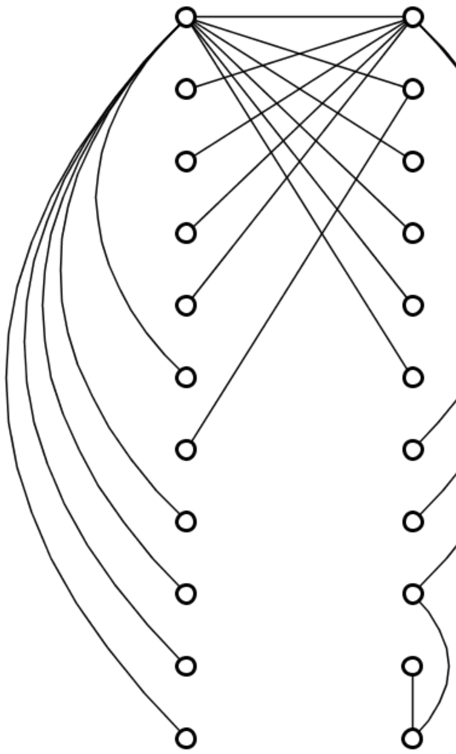
Důkaz. Nechť $n = 2k+1$, $k \geq 3$. Důkaz rozdělíme do dvou případů, a to pro $k = 3$ a $k \geq 4$.

- Nechť $k = 3$.
  2-housenka H $(2, 7, 4, 2, 2)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, x_0)$ pro $x = 4, 5, 6$ délek $3, 2, 1$, smíšené hrany $(0_0, 0_1), (0_0, 1_1), (0_0, 3_1), (1_0, 3_1), (3_0, 0_1), (2_0, 0_1), (0_0, 6_1)$ délek $0, 1, 3, 2, 4, 5, 6$, čisté 11-hrany $(0_1, 2_1), (2_1, 5_1), (5_1, 4_1)$ délek $2, 3, 1$.



Obr. 27: Konstrukce pro $k = 3$

- Nechť $k \geq 4$.
  Potom 2-housenka H $(2, 2k+1, 2k-2, 2, 2)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, x_0)$, pro $x = k+2, k+3, \ldots, 2k-1, 2k$ délek $k-1, k-2, \ldots, 2, 1$ a čistou 00-hranu $(0_0, k_0)$ délky k.
  Dále H obsahuje čisté 11-hrany $(0_1, y_1)$, pro $y = k+1, k+2, \ldots, 2k-3$ délek $k, k-1, \ldots, 4$. Také obsahuje cestu $0_1, (2k-2)_1, (2k)_1, (2k-1)_1$ s čistými 11-hranami délek $3, 2, 1$.
  2-housenka obsahuje smíšenou hranu $(0_0, 0_1)$ délky 0, smíšené hrany $(0_0, z_1)$, pro $z = 2, 3, \ldots, k$ délek $2, 3, \ldots, k$, cestu $0_0, 1_1, (k+1)_0$ se smíšenými hranami délek $1, k+1$, a nakonec smíšené hrany $(v_0, 0_1)$ pro $v = 1, 2, 3, \ldots, k-1$ délek $2k, 2k-1, 2k-2, \ldots, k+2$.



Obr. 28: Konstrukce pro $k = 5$

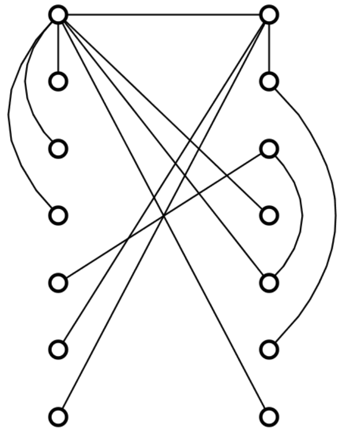
Snadno ověříme, že popsané hrany jsou skutečně hrany 2-housenky H $(2, 2k + 1, 2k - 2, 2, 2)$ (vrchol 0_0 má stupeň $2k + 1$, 0_1 má stupeň $2k - 2$ a vrcholy $1_1, (2k - 2)_1, (2k)_1$ jsou zbylé vrcholy páteře). Tudíž H má smíšené ohodnocení pro každé $k \geq 3$.

■

Lemma 1. 3 *2-housenka $(2, 2, n, n - 3, 2)$ umožňuje smíšené ohodnocení pro každé liché $n \geq 7$.*

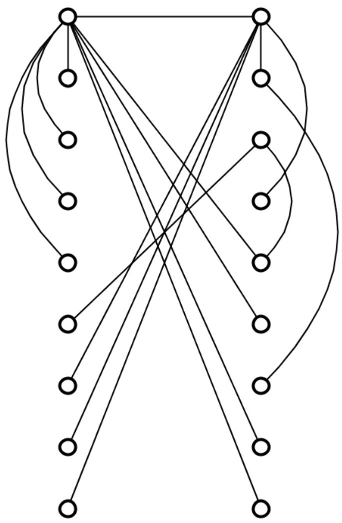
Důkaz. Nechť $n = 2k + 1$, $k \geq 3$. Důkaz rozdělíme do čtyř případů, a to pro $k = 3$, $k = 4$, k liché ($k \geq 5$) a k sudé ($k \geq 6$).

- Nechť $k = 3$.
  Potom 2-housenka H $(2, 2, 7, 4, 2)$ obsahuje smíšenou hranu $(0_0, 0_1)$ délky 0, čisté 00-hrany $(0_0, x_0)$ pro $x = 1, 2, 3$ délek $1, 2, 3$, smíšené hrany $(0_0, 3_1), (0_0, 6_1)$ délek 3 a 6, $(5_0, 0_1), (6_0, 0_1)$ hrany délek 2 a 1.
  H dále obsahuje cestu $0_1, 1_1, 5_1$ s čistými 11-hranami délek 1 a 3 a cestu $0_0, 4_1, 2_1, 4_0$ se smíšenou hranou délky 4, čistou 11-hranou délky 2 a smíšenou hranou délky 5.



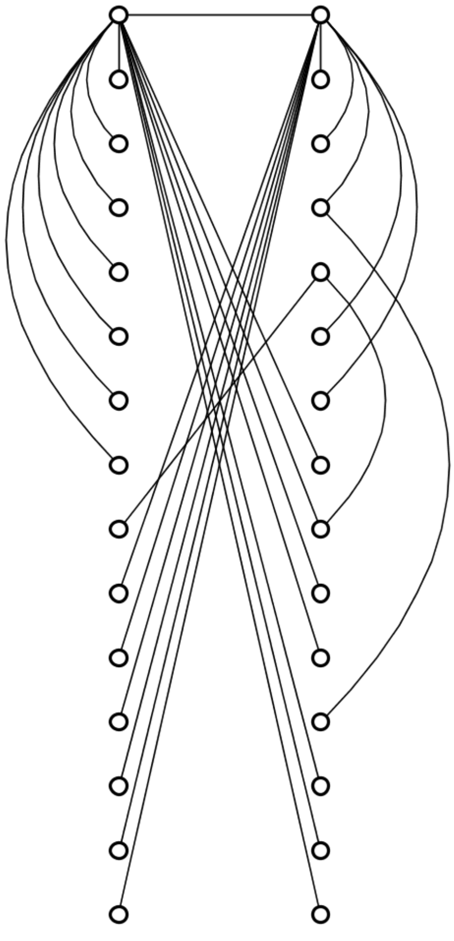
Obr. 29: Konstrukce pro $k = 3$

- Nechť $k = 4$.
  Potom 2-housenka H $(2, 2, 9, 6, 2)$ obsahuje smíšenou hranu $(0_0, 0_1)$ délky 0, čistou 11-hranu $(0_1, 3_1)$ délky 3, čisté 00-hrany $(0_0, x_0)$ pro $x = 1, 2, 3, 4$ délek $1, 2, 3, 4$, smíšené hrany $(0_0, 5_1), (0_0, 7_1), (0_0, 8_1)$ délek $5, 7$ a 8, smíšené hrany $(6_0, 0_1), (7_0, 0_1)$, $(8_0, 0_1)$ délek $3, 2, 1$.
  H dále obsahuje cestu $0_1, 1_1, 6_1$ s čistými 11-hranami délek 1 a 4 a cestu $0_0, 4_1, 2_1, 5_0$ se smíšenou hranou délky 4, čistou 11-hranou délky 2 a smíšenou hranou délky 6.



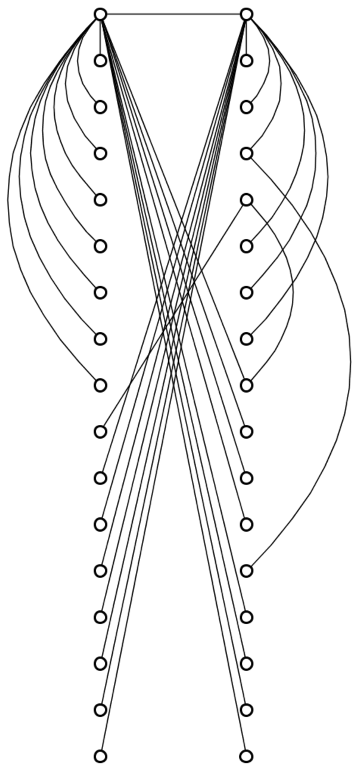
Obr. 30: Konstrukce pro $k = 4$

- Nechť k je liché a $k \geq 5$.
  Potom 2-housenka H $(2, 2, 2k+1, 2k-2, 2)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, x_0)$ pro $x = 1, 2, \ldots, k$ délek $1, 2, \ldots, k$. Čisté 11-hrany $(0_1, y_1)$ pro $y = 1, 2, \ldots, \frac{k+1}{2} - 2$ délek $1, 2, \ldots, \frac{k+1}{2} - 2$ a $(0_1, z_1)$ pro $z = \frac{k+1}{2} + 1, \frac{k+1}{2} + 2, \ldots, k-1$ délek $\frac{k+1}{2} + 1, \frac{k+1}{2} + 2, \ldots, k-1$.
  Dále H obsahuje smíšenou hranu $(0_0, k_1)$ délky k a $(0_0, 0_1)$ délky 0. Smíšené hrany $(0_0, u_1)$ pro $u = k+2, k+3, \ldots, \frac{3k+1}{2} - 1$ délek $k+2, k+3, \ldots, \frac{3k+1}{2} - 1$, dále hrany $(0_0, v_1)$ pro $v = \frac{3k+1}{2} + 1, \frac{3k+1}{2} + 2, \ldots, 2k$ délek $\frac{3k+1}{2} + 1, \frac{3k+1}{2} + 2, \ldots, 2k$ a smíšené hrany $(w_0, 0_1)$ pro $w = k+2, k+3, \ldots, 2k$ délek $k-1, k-2, \ldots, 2, 1$.
  H také obsahuje cestu $0_0, (k+1)_1, (\frac{k+1}{2})_1, (k+1)_0$ se smíšenou hranou délky $k+1$, čistou 11-hranou délky $\frac{k+1}{2}$ a smíšenou hranou délky $\frac{3k+1}{2}$. Nakonec H obsahuje cestu $0_1, (\frac{k+1}{2} - 1)_1, (\frac{3k+1}{2})_1$ s čistými 11-hranami délek $\frac{k+1}{2} - 1$ a k.



Obr. 31: Konstrukce pro $k = 7$

- Nechť k je sudé a $k \geq 6$.
  Potom 2-housenka H $(2, 2, 2k+1, 2k-2, 2)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, x_0)$ pro $x = 1, 2, \ldots, k$ délek $1, 2, \ldots, k$, čisté 11-hrany $(0_1, y_1)$ pro $y = 1, 2, \ldots, \frac{k}{2} - 2$ délek $1, 2, \ldots, \frac{k}{2} - 2$ a $(0_1, z_1)$ pro $z = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \ldots, k-1$ délek $\frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 2, \ldots, k-1$. Dále H obsahuje smíšenou hranu $(0_0, 0_1)$ délky 0, smíšené hrany $(0_0, u_1)$ pro $u = k+1, k+2, \ldots, \frac{3k}{2} - 1$ délek $k+1, k+2, \ldots, \frac{3k}{2} - 1$, dále hrany $(0_0, v_1)$ pro $v = \frac{3k}{2} + 1, \frac{3k}{2} + 2, \ldots, 2k$ délek $\frac{3k}{2} + 1, \frac{3k}{2} + 2, \ldots, 2k$ a smíšené hrany $(w_0, 0_1)$ pro $w = k+2, k+3, \ldots, 2k$ délek $k-1, k-2, \ldots, 2, 1$.
  H také obsahuje cestu $(0_0, k_1, (\frac{k}{2})_1, (k+1)_0)$ se smíšenou hranou délky k, čistou 11-hranou délky $\frac{k}{2}$ a smíšenou hranou délky $\frac{3k}{2}$. Nakonec H obsahuje cestu $(0_1, (\frac{k}{2} - 1)_1, (\frac{3k}{2})_1)$ s čistými 11-hranami délek $\frac{k}{2} - 1, k$.



Obr. 32: Konstrukce pro $k = 8$

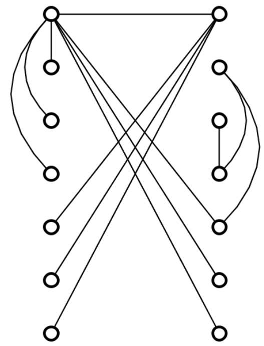
Snadno ověříme, že popsané hrany jsou skutečně hrany 2-housenky H $(2, 2, 2k+1, 2k-2, 2)$ (vrchol 0_0 má stupeň $2k+1$, 0_1 má stupeň $2k-2$, vrcholy $(k+1)_1, (\frac{k+1}{2})_1, (\frac{k+1}{2} - 1)_1$ pro liché k a vrcholy $k_1, (\frac{k}{2})_1, (\frac{k}{2} - 1)_1$ pro sudé k jsou zbylé vrcholy páteře). Tudíž H má smíšené ohodnocení pro každé $k \geq 3$.

∎

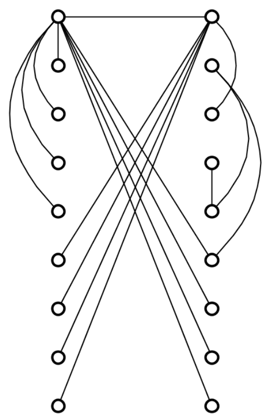
Lemma 1. 4 *2-housenka* $(2, 2, 2, n, n-3)$ *umožňuje smíšené ohodnocení pro každé liché* $n \geq 7$.

Důkaz. Nechť $n = 2k+1$, $k \geq 3$.

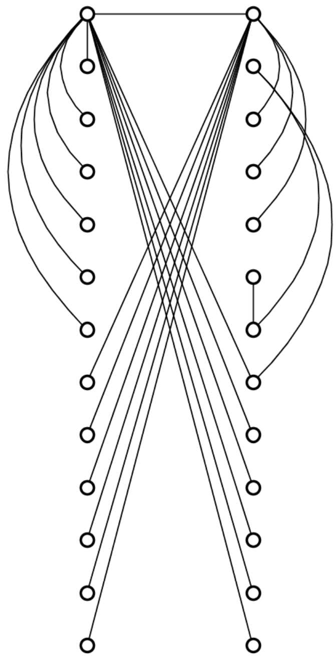
- Potom 2-housenka H $(2, 2, 2, 2k+1, 2k-2)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, v_0)$ pro $v = 1, 2, \ldots, k$ délek $1, 2, \ldots, k$ a čisté 11-hrany $(0_1, x_1)$ pro $x = 2, 3, \ldots, k-2$ délek $2, 3, \ldots, k-2$. Dále H obsahuje smíšenou hranu $(0_0, 0_1)$ délky 0, smíšené hrany $(0_0, y_1)$ pro $y = 2k, 2k-1, \ldots, k+2$ délek $2k, 2k-1, \ldots, k+2$ a smíšené hrany $(z_0, 0_1)$ pro $z = k+1, k+2, \ldots, 2k$ délek $k, k-1, \ldots, 2, 1$. Nakonec H obsahuje cestu $0_0, (k+1)_1, 1_1, k_1, (k-1)_1$ se smíšenou hranou délky $k+1$ a čistými 11-hranami délek $k, k-1, 1$.



Obr. 33: Konstrukce pro $k = 3$



Obr. 34: Konstrukce pro $k = 4$



Obr. 35: Konstrukce pro $k = 6$

Snadno ověříme, že popsané hrany jsou skutečně hrany 2-housenky H $(2, 2, 2, 2k+1, 2k-2)$ (vrchol 0_0 má stupeň $2k + 1$, 0_1 má stupeň $2k - 2$, vrcholy $(k + 1)_1, 1_1, k_1$ jsou zbylé vrcholy páteře). Tudíž H má smíšené ohodnocení pro každé $k \geq 3$.

■

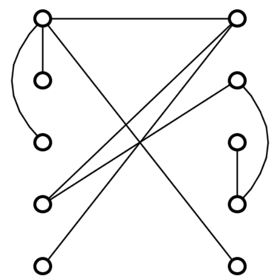
Věta 4.2 *Každá 2-housenka* $[n, n - 3, 2, 2, 2]$ *na* $2n$ *vrcholech faktorizuje kompletní graf* K_{2n} *pro libovolné liché* n, $n \geq 7$, *jsou-li vrcholy stupňů* n *a* $n - 3$ *sousední.*

Důkaz. Plyne přímo z předešlých Lemmat 1.1 - 1.4 a věty 3.5. ■

Lemma 2. 1 *2-housenka* $(n-1, n-2, 2, 2, 2)$ *umožňuje smíšené ohodnocení pro každé liché* $n \geq 5$.

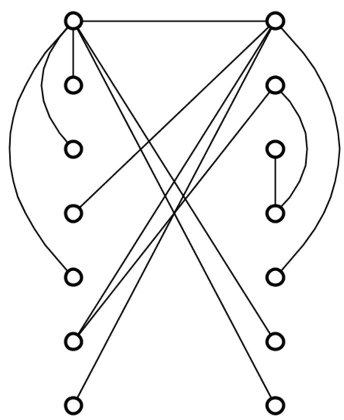
Důkaz. Nechť $n = 2k+1$, $k \geq 2$. Důkaz rozdělíme do tří případů, a to pro $k = 2$, $k = 3$ a $k \geq 4$.

- Nechť $k = 2$.
  Potom 2-housenka H $(4, 3, 2, 2, 2)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, 1_0), (0_0, 2_0)$ délek 1 a 2, smíšené hrany $(0_0, 0_1), (0_0, 4_1), (4_0, 0_1)$ délek $0, 4, 1$ a cestu $0_1, 3_0, 1_1, 3_1, 2_1$ se smíšenými hranami délek $2, 3$ a čistými 11-hranami délek 2 a 1.



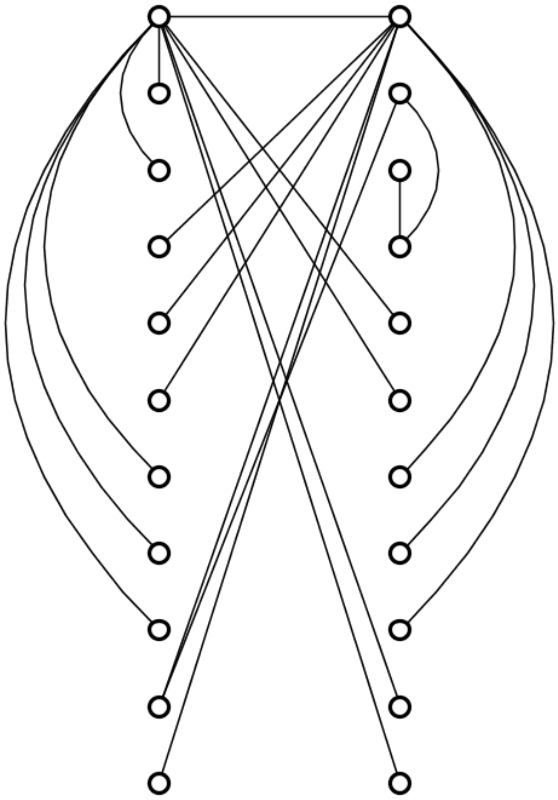
Obr. 36: Konstrukce pro $k = 2$

- Nechť $k = 3$.
  Potom 2-housenka H $(6, 5, 2, 2, 2)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, 1_0), (0_0, 2_0), (0_0, 4_0)$ délek $1, 2$ a 3, čistou 11-hranu $(0_1, 4_1)$ délky 3, cestu $0_1, 5_0, 1_1, 3_1, 2_1$ se smíšenými hranami délek $2, 3$ a čistými 11-hranami délek 2 a 1.
  Nakonec H obsahuje smíšené hrany $(0_0, 0_1), (0_0, 5_1), (0_0, 6_1), (3_0, 0_1), (6_0, 0_1)$ délek $0, 5, 6, 4, 1$.



Obr. 37: Konstrukce pro $k = 3$

- Nechť $k \geq 4$.
  Potom 2-housenka H $(2k, 2k-1, 2, 2, 2)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, 1_0), (0_0, 2_0)$ délek $1, 2$, hrany $(0_0, v_0)$ pro $v = k+1, k+2, \ldots, 2k-3, 2k-2$ délek $k, k-1, \ldots, 4, 3$.
  Dále H obsahuje čisté 11-hrany $(0_1, x_1)$ pro $x = k+1, k+2, \ldots, 2k-3, 2k-2$ délek $k, k-1, \ldots, 4, 3$.
  H také obsahuje smíšené hrany $(y_0, 0_1)$ pro $y = 3, 4, \ldots, k-1, k$ délek $2k-2, 2k-3, \ldots, k+2, k+1$, smíšené hrany $(0_0, z_1)$ pro $z = 4, 5, \ldots, k-1, k$ délek $4, 5, \ldots, k-1, k$, smíšenou hranu $((2k)_0, 0_1)$ délky 1, smíšenou hranu $(0_0, (2k-1)_1)$ délky $2k-1$, smíšenou hranu $(0_0, (2k)_1)$ délky $2k$ a smíšenou hranu $(0_0, 0_1)$ délky 0.
  Nakonec H obsahuje cestu $0_1, (2k-1)_0, 1_1, 3_1, 2_1$ se smíšenými hranami délek $2, 3$ a čistými 11-hranami délek 2 a 1.



Obr. 38: Konstrukce pro $k = 5$

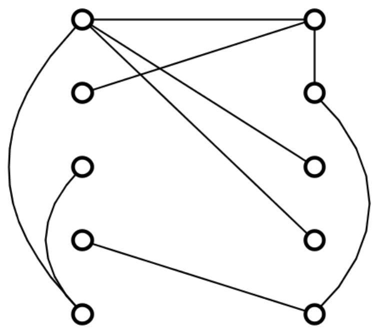
Snadno ověříme, že popsané hrany jsou skutečně hrany 2-housenky H $(2k, 2k-1, 2, 2, 2)$ (vrchol 0_0 má stupeň $2k$, 0_1 má stupeň $2k-1$, vrcholy $(2k-1)_0, 1_1, 3_1$ jsou zbylé vrcholy páteře). Tudíž H má smíšené ohodnocení pro každé $k \geq 2$.

■

Lemma 2. 2 *2-housenka* $(2, n-1, n-2, 2, 2)$ *umožňuje smíšené ohodnocení pro každé liché* $n \geq 5$.

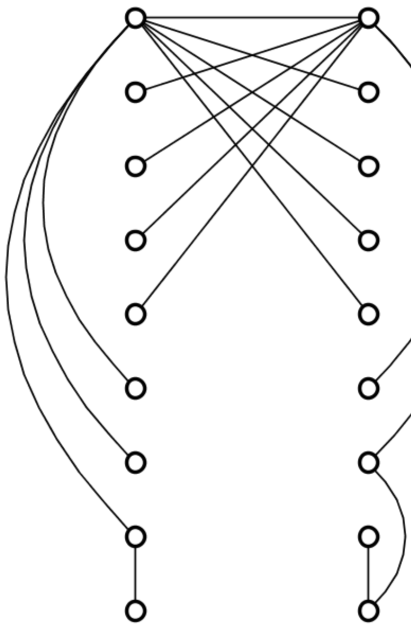
Důkaz. Nechť $n = 2k+1$, $k \geq 2$. Důkaz rozdělíme do dvou případů, a to pro $k = 2$ a $k \geq 3$.

- Nechť $k = 2$.
  Potom 2-housenka H $(2, 4, 3, 2, 2)$ obsahuje smíšené hrany $(0_0, 0_1)$, $(0_0, 2_1)$, $(0_0, 3_1)$, $(1_0, 0_1)$ délek $0, 2, 3, 4$. H obsahuje cestu $0_1, 1_1, 4_1, 3_0$ s čistými 11-hranami délek $1, 2$ a smíšenou hranou délky 1 a cestu $0_0, 4_0, 2_0$ s čistými 00-hranami délek $1, 2$.



Obr. 39: Konstrukce pro $k = 2$

- Nechť $k \geq 3$.
  Potom 2-housenka H $(2, 2k, 2k-1, 2, 2)$ obsahuje smíšené hrany $(0_0, 0_1)$ délky 0, $(0_0, x_1)$ pro $x = 1, 2, \ldots, k-1, k$ délek $1, 2, \ldots, k-1, k$, $(y_0, 0_1)$ pro $y = 1, 2, \ldots, k-1, k$ délek $2k, 2k-1, \ldots, k+2, k+1$.
  H také obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, z_0)$ pro $z = 2k-2, 2k-3, \ldots, k+2, k+1$ délek $3, 4, \ldots, k-1, k$, čisté 11-hrany $(0_1, v_1)$ pro $v = k+1, k+2, \ldots, 2k-4, 2k-3$ délek $k, k-1, \ldots, 5, 4$.
  Nakonec H obsahuje cestu $0_0, (2k-1)_0, (2k)_0$ s čistými 00-hranami délek $2, 1$ a cestu $0_1, (2k-2)_1, (2k)_1, (2k-1)_1$ čistými 11-hranami délek $3, 2, 1$.



Obr. 40: Konstrukce pro $k = 4$

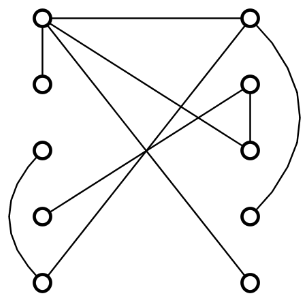
Snadno ověříme, že popsané hrany jsou skutečně hrany 2-housenky H $(2, 2k, 2k-1, 2, 2)$ (vrchol 0_0 má stupeň $2k$, 0_1 má stupeň $2k-1$, vrcholy $(2k-1)_0, (2k-2)_1, (2k)_1$ jsou zbylé vrcholy páteře). Tudíž H má smíšené ohodnocení pro každé $k \geq 2$.

■

Lemma 2. 3 *2-housenka* $(2, 2, n-1, n-2, 2)$ *umožňuje smíšené ohodnocení pro každé liché* $n \geq 5$.

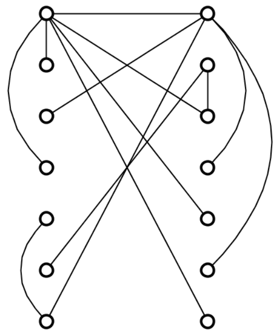
Důkaz. Nechť $n = 2k+1$, $k \geq 2$. Důkaz rozdělíme do čtyř případů, a to pro $k = 2$, $k = 3$, k sudé ($k \geq 4$) a k liché ($k \geq 5$).

- Nechť $k = 2$.
  Potom 2-housenka H $(2, 2, 4, 3, 2)$ obsahuje čistou 00-hranu $(0_0, 1_0)$ délky 1 a čistou 11-hranu $(0_1, 3_1)$ délky 2. H dále obsahuje cestu $0_0, 2_1, 1_1, 3_0$ se smíšenou hranou délky 2, čistou 11-hranou délky 1 a smíšenou hranou délky 3 a cestu $(0_1, 4_0, 2_0)$ se smíšenou hranou délky 1 a čistou 00-hranou délky 2. Nakonec H obsahuje smíšenou hranu $(0_0, 4_1)$ délky 4 a smíšenou hranu $(0_0, 0_1)$ délky 0.



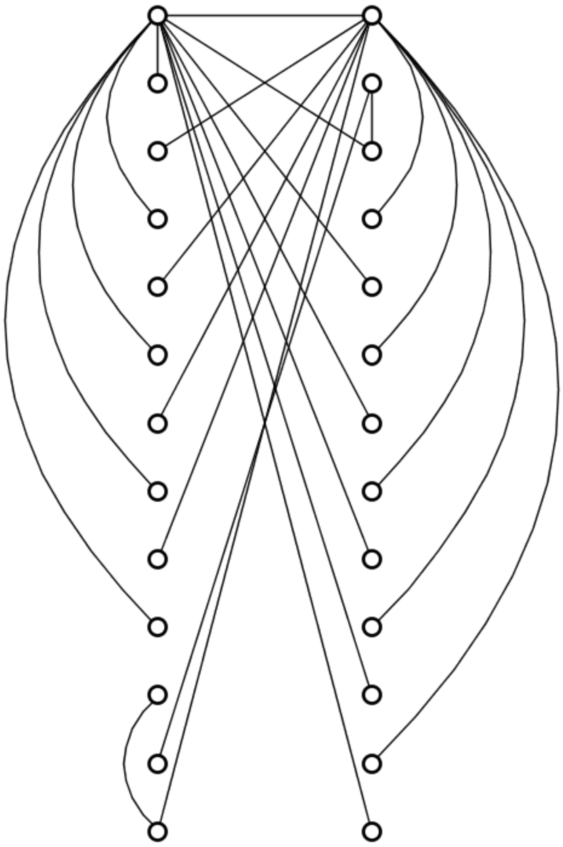
Obr. 41: Konstrukce pro $k = 2$

- Nechť $k = 3$.
  Potom 2-housenka H $(2, 2, 6, 5, 2)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, 1_0), (0_0, 3_0)$ délek 1 a 3 a čisté 11-hrany $(0_1, 3_1), (0_1, 5_1)$ délek 3 a 2. H obsahuje cestu $0_0, 2_1, 1_1, 5_0$ se smíšenou hranou délky 2, čistou 11-hranou délky 1 a smíšenou hranou délky 3 a cestu $0_1, 6_0, 4_0$ se smíšenou hranou délky 1 a čistou 00-hranou délky 2. Nakonec H obsahuje smíšené hrany $(0_0, 0_1), (0_0, 4_1), (2_0, 0_1), (0_0, 6_1)$ délek $0, 4, 5, 6$.



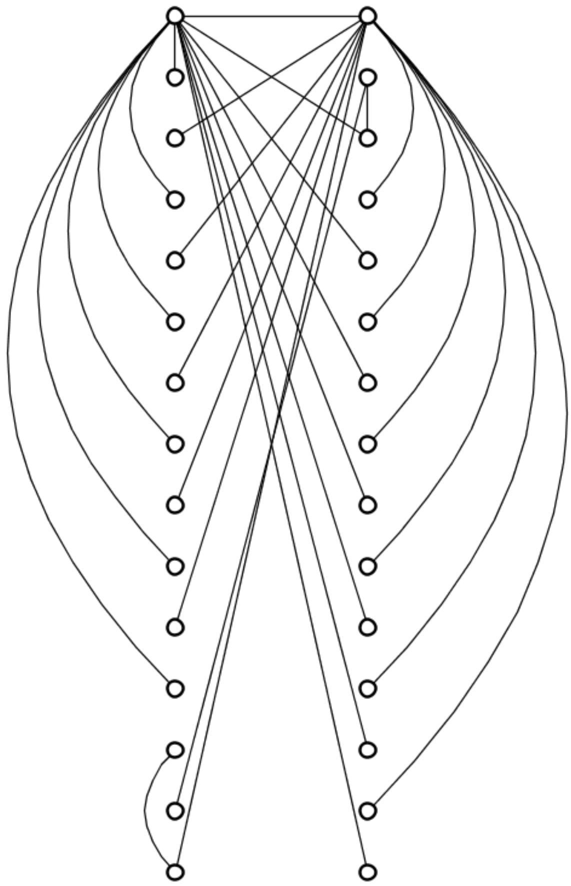
Obr. 42: Konstrukce pro $k = 3$

- Nechť k je sudé a $k \geq 4$.
  Potom 2-housenka H $(2, 2, 2k, 2k - 1, 2)$ obsahuje smíšené hrany $(u_0, 0_1)$ pro $u = 2, 4, \ldots, 2k - 6, 2k - 4$ délek $2k - 1, 2k - 3, \ldots, 7, 5$, $(0_0, v_1)$ pro $v = 4, 6, \ldots, 2k - 2, 2k$ délek $4, 6, \ldots, 2k - 2, 2k$ a smíšenou hranu $(0_0, 0_1)$ délky 0.
  H dále obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, w_0)$ pro $w = 1, 3, \ldots, k - 3, k - 1$ délek $1, 3, \ldots, k - 3, k - 1$, $(0_0, x_0)$ pro $x = k + 1, k + 3, \ldots, 2k - 5, 2k - 3$ délek $k, k - 2, \ldots, 6, 4$, čisté 11-hrany $(0_1, y_1)$ pro $y = 3, 5, \ldots, k - 3, k - 1$ délek $3, 5, \ldots, k - 3, k - 1$, $(0_1, z_1)$ pro $z = k + 1, k + 3, \ldots, 2k - 3, 2k - 1$ délek $k, k - 2, \ldots, 4, 2$.
  A nakonec H obsahuje cestu $0_0, 2_1, 1_1, (2k - 1)_0$ se smíšenou hranou délky 2, čistou 11-hranou délky 1 a smíšenou hranou délky 3 a cestu $0_1, (2k)_0, (2k - 2)_0$ se smíšenou hranou délky 1 a čistou 00-hranou délky 2.



Obr. 43: Konstrukce pro $k = 6$

- Nechť k je liché a $k \geq 5$.
  Potom 2-housenka H $(2, 2, 2k, 2k-1, 2)$ obsahuje smíšené hrany $(u_0, 0_1)$ pro $u = 2, 4, \ldots, 2k-6, 2k-4$ délek $2k-1, 2k-3, \ldots, 7, 5$, $(0_0, v_1)$ pro $v = 4, 6, \ldots, 2k-2, 2k$ délek $4, 6, \ldots, 2k-2, 2k$ a smíšenou hranu $(0_0, 0_1)$ délky 0.
  H dále obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, w_0)$ pro $w = 1, 3, \ldots, k-2, k$ délek $1, 3, \ldots, k-2, k$, $(0_0, x_0)$ pro $x = k+2, k+4, \ldots, 2k-5, 2k-3$ délek $k-1, k-3, \ldots, 6, 4$, čisté 11-hrany $(0_1, y_1)$ pro $y = 3, 5, \ldots, k-2, k$ délek $3, 5, \ldots, k-2, k$, $(0_1, z_1)$ pro $z = k+2, k+4, \ldots, 2k-3, 2k-1$ délek $k-1, k-3, \ldots, 4, 2$.
  A nakonec H obsahuje cestu $0_0, 2_1, 1_1, (2k-1)_0$ se smíšenou hranou délky 2, čistou 11-hranou délky 1 a smíšenou hranou délky 3 a cestu $0_1, (2k)_0, (2k-2)_0$ se smíšenou hranou délky 1 a čistou 00-hranou délky 2.



Obr. 44: Konstrukce pro $k = 7$

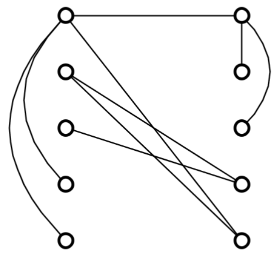
Snadno ověříme, že popsané hrany jsou skutečně hrany 2-housenky H $(2, 2, 2k, 2k-1, 2)$ (vrchol 0_0 má stupeň $2k$, 0_1 má stupeň $2k-1$, vrcholy $2_1, 1_1, (2k)_0$ jsou zbylé vrcholy páteře). Tudíž H má smíšené ohodnocení pro každé $k \geq 2$.

■

Lemma 2. 4 *2-housenka* $(2, 2, 2, n-1, n-2)$ *umožňuje smíšené ohodnocení pro každé liché* $n \geq 5$.

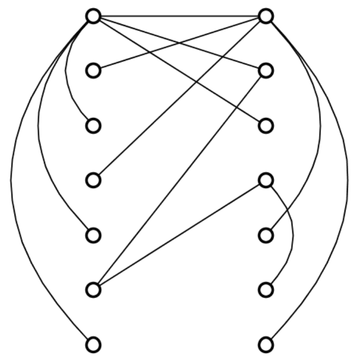
Důkaz. Nechť $n = 2k+1$, $k \geq 2$. Důkaz rozdělíme do čtyř případů, a to pro $k = 2$, $k = 3$, k sudé ($k \geq 4$) a k liché ($k \geq 5$).

- Nechť $k = 2$.
  Potom 2-housenka H $(2, 2, 2, 4, 3)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, 4_0), (0_0, 3_0)$ délek 1 a 2 a čisté 11-hrany $(0_1, 1_1), (0_1, 2_1)$ délek 1 a 2.
  H také obsahuje cestu $(0_0, 4_1, 1_0, 3_1, 2_0)$ se smíšenými hranami délek $4, 3, 2, 1$.
  Nakonec H obsahuje smíšenou hranu $(0_0, 0_1)$ délky 0.



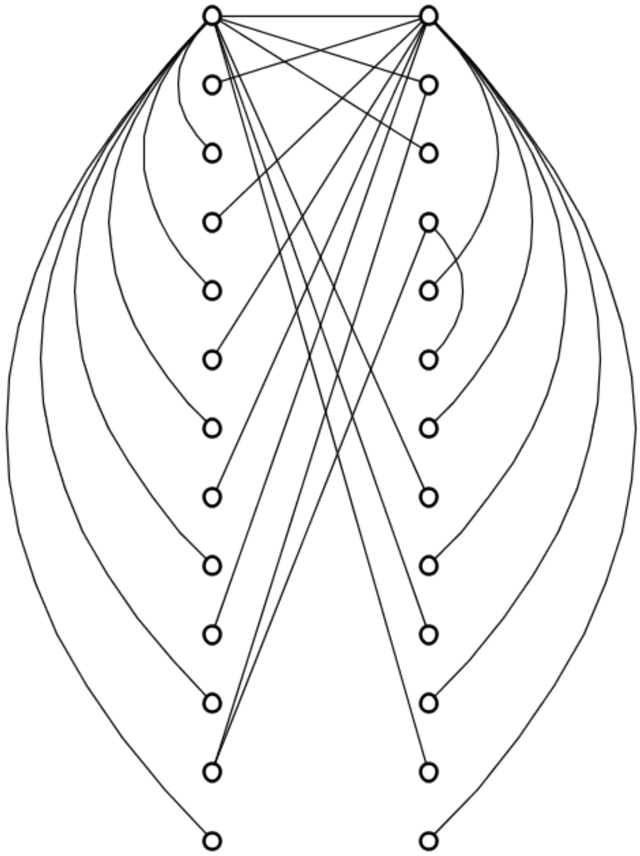
Obr. 45: Konstrukce pro $k = 2$

- Necht' $k = 3$.
  Potom 2-housenka H $(2, 2, 2, 6, 5)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, 6_0), (0_0, 4_0), (0_0, 2_0)$ délek $1, 3, 2$ a čisté 11-hrany $(0_1, 4_1), (0_1, 6_1)$ délek 3 a 1.
  H dále obsahuje smíšené hrany $(0_0, 0_1), (1_0, 0_1), (3_0, 0_1), (0_0, 2_1)$ délek $0, 6, 4$ a 2.
  Nakonec H obsahuje cestu $(0_0, 1_1, 5_0, 3_1, 5_1)$ se smíšenými hranami délek $1, 3, 5$ a čistou 11-hranou délky 2.



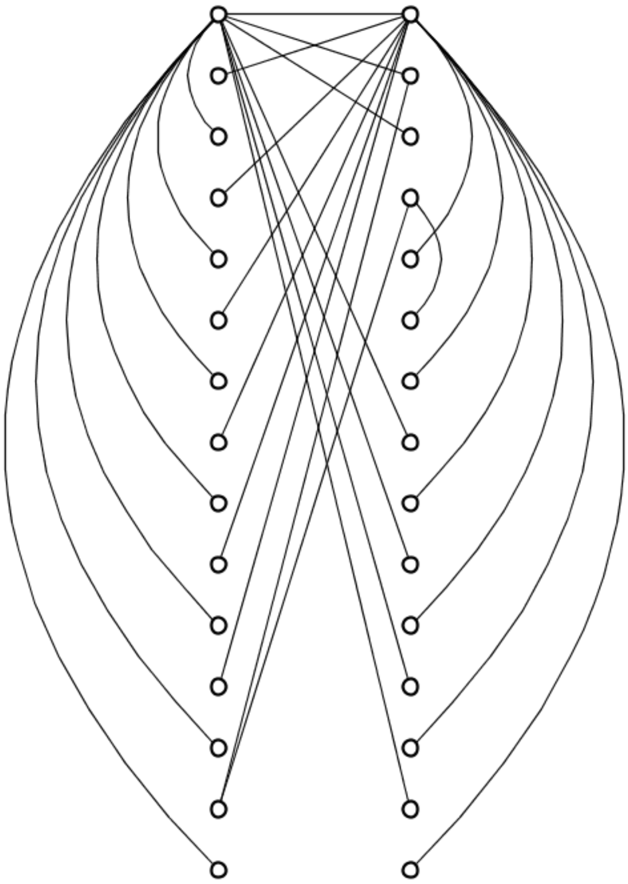
Obr. 46: Konstrukce pro $k = 3$

- Necht' k je sudé a $k \geq 4$.
  Potom 2-housenka H $(2, 2, 2, 2k, 2k-1)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, u_0)$ pro $u = 2, 4, \dots, k-2, k$ délek $2, 4, \dots, k-2, k$, hrany $(0_0, v_0)$ pro $v = k+2, k+4, \dots, 2k-2, 2k$ délek $k-1, k-3, \dots, 3, 1$. H dále obsahuje čisté 11-hrany $(0_1, w_1)$ pro $w = 4, 6, \dots, k-2, k$ délek $4, 6, \dots, k-2, k$, hrany $(0_1, x_1)$ pro $x = k+2, k+4, \dots, 2k-2, 2k$ délek $k-1, k-3, \dots, 3, 1$.
  H obsahuje smíšené hrany $(y_0, 0_1)$ pro $y = 1, 3, \dots, 2k-5, 2k-3$ délek $2k, 2k-2, \dots, 6, 4$, hrany $(0_0, z_1)$ pro $z = 7, 9, \dots, 2k-3, 2k-1$ délek $7, 9, \dots, 2k-3, 2k-1$, smíšenou hranu $(0_0, 0_1)$ délky 0 a $(0_0, 2_1)$ délky 2. Nakonec H obsahuje cestu $0_0, 1_1, (2k-1)_0, 3_1, 5_1$ se smíšenými hranami délek $1, 3, 5$ a čistou 11-hranou délky 2.



Obr. 47: Konstrukce pro $k = 6$

- Nechť k je liché a $k \geq 5$.
  Potom 2-housenka H $(2, 2, 2, 2k, 2k-1)$ obsahuje čisté 00-hrany $(0_0, u_0)$ pro $u = 2, 4, \ldots, k-3, k-1$ délek $2, 4, \ldots, k-3, k-1$, hrany $(0_0, v_0)$ pro $v = k+1, k+3, \ldots, 2k-2, 2k$ délek $k, k-2, \ldots, 3, 1$. H dále obsahuje čisté 11-hrany $(0_1, w_1)$ pro $w = 4, 6, \ldots, k-3, k-1$ délek $4, 6, \ldots, k-3, k-1$, hrany $(0_1, x_1)$ pro $x = k+1, k+3, \ldots, 2k-2, 2k$ délek $k, k-2, \ldots, 3, 1$.
  H obsahuje smíšené hrany $(y_0, 0_1)$ pro $y = 1, 3, \ldots, 2k-5, 2k-3$ délek $2k, 2k-2, \ldots, 6, 4$, hrany $(0_0, z_1)$ pro $z = 7, 9, \ldots, 2k-3, 2k-1$ délek $7, 9, \ldots, 2k-3, 2k-1$, smíšenou hranu $(0_0, 0_1)$ délky 0 a $(0_0, 2_1)$ délky 2. Nakonec H obsahuje cestu $0_0, 1_1, (2k-1)_0, 3_1, 5_1$ se smíšenými hranami délek $1, 3, 5$ a čistou 11-hranou délky 2.



Obr. 48: Konstrukce pro $k = 7$

Snadno ověříme, že popsané hrany jsou skutečně hrany 2-housenky $H\ (2, 2, 2, 2k, 2k-1)$ (vrchol 0_0 má stupeň $2k$, 0_1 má stupeň $2k-1$, vrcholy $1_1, (2k-1)_0, 3_1$ jsou zbylé vrcholy páteře). Tudíž H má smíšené ohodnocení pro každé $k \geq 2$.

■

Věta 4.3 *Každá 2-housenka $[n-1, n-2, 2, 2, 2]$ na $2n$ vrcholech faktorizuje kompletní graf K_{2n} pro libovolné liché $n \geq 5$, jsou-li vrcholy stupňů $n-1$ a $n-2$ sousední.*

Důkaz. Plyne přímo z předešlých Lemmat 2.1 - 2.4 a věty 3.5. ■

5 Implementované programy

Pro vytvoření programů byl použit programovací jazyk $C++$ a vývojové prostředí Visual Studio 2010 (licence v rámci VŠB - MSDN Academic Alliance). Implementované programy jsou přiloženy na CD.

V první části popíšeme program sloužící pro vstup zkoumaných stromů do softwaru pro paralelní vyhledávání faktorizací kompletních grafů, v druhé části program pro vyhledávání smíšených ohodnocení pro kostry (postačující podmínka pro faktorizaci K_{2n}, pro n liché (viz věta 3.5).

5.1 Vstup zkoumaných stromů

Jak jsme již zmínili dříve, tento program slouží pro vstup zkoumaných stromů do softwaru pro paralelní vyhledávání faktorizací kompletních grafů.

Program byl vytvořen konkrétně z toho důvodu, že vstup do daného softwaru vyžaduje jiný zápis stromů, než v jakém jsou k dispozici seznamy neizomorfních stromů ke stažení na internetu[1].

Vstup tedy odpovídá standardní struktuře seznamu sousedů (viz ukázka 1). Program projde vstupní soubor, uloží si jednotlivé vrcholy požadovaného grafu do matice sousednosti (jsou-li sousední, tzn. pokud je mezi nimi hrana), podle které pak uspořádá pole s jednotlivým označením vrcholů (např. $v_1, v_2, \ldots$, případně $u_1, u_2, \ldots$), které je součástí výstupního souboru. Výstup programu odpovídá požadavkům paralelního softwaru pro hledání faktorizací na izomorfní stromy (viz ukázka 2).

```
Graph 1, order 12.
  0 : 11;
  1 : 11;
  2 : 11;
  3 : 11;
  4 : 11;
  5 : 11;
  6 : 11;
  7 : 11;
  8 : 11;
  9 : 11;
 10 : 11;
 11 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10;
```

Ukázka 1: Vstupní soubor

```
12
{v1v12,v2v12,v3v12,v4v12,v5v12,v6v12,v7v12,v8v12,v9v12,v10v12,v11v12}
{u1u12,u2u12,u3u12,u4u12,u5u12,u6u12,u7u12,u8u12,u9u12,u10u12,u11u12}
2
```

Ukázka 2: Výstupní soubor

[1] https://hog.grinvin.org/Trees

5.1.1 Algoritmus

Program spouštíme přes příkazovou řádku s přesně pěti parametry. Prvním parametrem je název spustitelného souboru programu, druhým je název vstupního souboru, např. trees12.txt, třetím je číslo požadovaného grafu (0 pro výpis všech), čtvrtým je požadovaná konstanta a pátým je název výstupního souboru, např. out.txt. Pokud zadáme jiný počet parametrů, program se nespustí, v případě, že zadáme správný počet parametrů, dojde k úspěšnému spuštění programu.

Na začátku se spustí procedura **void** ProVsechny(**char** *vstupSoubor, **char** *cisloGrafu, **char** *konstanta, **char** *vystupSoubor), která obsahuje další procedury, některé se spustí v závislosti na požadovaném čísle grafu ze vstupních parametrů programu.

Jako první se spustí procedura **void** VytvoreniMatice(**char** *vstupSoubor), která vytvoří matici sousednosti podle počtu vrcholů ve vstupním souboru. K tomu slouží první řádek ve vstupním souboru, a to např.: Graph 1, order 12., kde zjistíme, že naše požadované číslo v tomto případě bude 12 (pokud máme jako parametr vstupSoubor - trees12.txt) (toto číslo se uloží do globální proměnné order). Procedura si také zjistí, jaký je počet grafů ve vstupním souboru, pro pozdější kontrolu vstupního parametru z příkazové řádky, a to konkrétně pro číslo požadovaného grafu.

Jako druhá se spustí procedura **void** VycisteniSouboru(**char** *vystupSoubor), která vymaže předchozí obsah výstupního souboru, pokud nějaký existoval (aby nedošlo k nechtěnému přidávání dalších výsledků za sebe do stejného souboru).

O tom, jak bude program pokračovat dál, rozhoduje nyní číslo, které jsme zadali při zadání vstupních parametrů, a to konkrétně třetí parametr - číslo požadovaného grafu. Hlavní podmínka rozdělí program na dvě větve: jestli číslo je 0 a jestli je různé od nuly.

Jako první možnost vezmeme příklad, že vstup byl 0. Zde jsme použili cyklus s podmínkou na konci, konkrétně s podmínkou dokud je proměnná cislo menší nebo rovna počtu grafů ve vstupním souboru, dekrementovánu o jedničku. Následně se opakují čtyři procedury (a inkrementace proměnné cislo (ve které je uložena informace o tom, který graf zrovna převádíme)):

- **void** VycisteniMatice() - procedura, která vynuluje matici sousednosti.
- **void** NacteniSouboruAGrafu(**char** *vstupSoubor, **int** cisloGrafu) - v této proceduře pracujeme se vstupním souborem, ve kterém vyhledáme požadovaný graf, který chceme v danou chvíli převádět. Postupujeme řádek po řádku (v cyklu **for**, kde začínáme nulou a končíme počtem vrcholů (globální proměnnou order)), pokaždé si do matice sousednosti uložíme informaci o tom, který vrchol je s kterým sousední (na dané pozici v matici se 0 přepíše na 1).
- **void** PrevodZMatice() - procedura využívající funkci string* VytvoreniPole(**char** znak), která nám vytvoří (a vrací) pole znaků s čísly (konkrétně používáme znaky v a u s čísly 1 až order, tzn. např.: v1,v2 ,...). V samotné proceduře pak vytváříme seznam hran podle matice sousednosti (např.: v1v12,v2v12,v3v12,...).

- **void** ZapisDoSouboru(**char** ∗konstanta, **char** ∗vystupSoubor, **int** cisloGrafu) - procedura, která nám vytváří výstupní soubor. Na první řádek zapíšeme order, který je stejný jako ve vstupním souboru, na druhý a třetí řádek zapíšeme seznam hran do složených závorek, oddělený čárkami a na poslední řádek napíšeme konstantu (ze vstupního souboru) (viz ukázka 2).

Po ukončení cyklu s podmínkou na konci máme výstupní soubor obsahující převod všech grafů ze vstupního souboru na seznam hran v požadovaném formátu. Algoritmus trvá déle, máme-li velký vstupní soubor (tzn. více grafů na převod), jelikož výsledek zapisujeme do jednoho textového souboru, s kterým se při každém zápise do souboru pracuje.

Druhou možností pokračování programu je, že vstup nebyl 0. V tom případě provedeme stejnou sekvenci procedur (ale pouze jednou), jako v případě pro vstup roven nule, pro případ, že bylo zadáno číslo grafu, které existuje ve vstupním souboru. Pokud bylo zadáno špatné číslo, vypíše se chybová hláška. Výsledkem tedy je jeden textový soubor s převodem požadovaného grafu.

5.2 Smíšené ohodnocení

Tento program slouží pro nalezení smíšených ohodnocení pro kostry. K vyhledání jednotlivých ohodnocení použijeme rekurzivní proceduru, která projde postupně všechny možnosti ohodnocení dané kostry.

Jako vstup máme textový soubor (viz ukázka **??**), který na prvním řádku bude obsahovat počet vrcholů grafu, na dalším pak seznam hran a poslední řádek nese informaci o počtu požadovaných řešení (0 pro všechny). Je důležité, aby seznam hran byl psán tak, aby se nestalo, že po přidání hrany nám vzniknou dvě komponenty grafu, tzn. přidáváme vrchol (hranu) vždy k již dříve přidanému vrcholu (takto seřazeny hrany jsou pro strom vždy, jinak by byla porušena souvislost stromu, popř. by vznikla kružnice). Výstupem programu je tedy textový soubor, který obsahuje jedno nebo více smíšených ohodnocení pro požadovaný graf (viz ukázka 3).

```
14
{v1v2,v2v4,v2v5,v4v6,v5v7,v7v3,v7v8,v8v9,v8v10,v10v11,v11v12,v11v13,v13v14}
15
```

Ukázka 3: Vstupní soubor

```
1. reseni:
0_0 1_0
1_0 3_0
1_0 4_0
3_0 0_1
4_0 2_1
2_1 2_0
2_1 6_0
6_0 1_1
6_0 5_1
5_1 3_1
3_1 4_1
3_1 6_1
6_1 5_0
```

Ukázka 4: Výstupní soubor

5.2.1 Algoritmus

Program spouštíme přes příkazovou řádku s přesně dvěma parametry. Prvním parametrem je název spustitelného souboru programu, druhým je název vstupního souboru, např. vstup.txt. Pokud zadáme počet parametrů jiný, program se nespustí, v případě, že zadáme správný počet parametrů, program se úspěšně spustí.

Na začátku se spustí procedura **void** Hlavni(**char** *vstupniSoubor), která obsahuje další procedury, které se spustí všechny bez rozdílu na požadovaném počtu řešení.
Jako první se spustí procedura **void** NacteniK(**char** *vstupniSoubor), ve které si zjistíme požadované hodnoty ze vstupního souboru, a to konkrétně požadovaný počet řešení a počet vrcholů grafu, ze kterého si vypočteme n a k pro následné smíšené ohodnocení grafu.
Jako druhá se spustí procedura **void** PocetPrvkuVytvoreniPole(**char** *vstupniSoubor), která vytvoří pole pro následný seznam vrcholů ze vstupního souboru (tzn. seznam hran).
Dále se spustí procedura **void** NacteniSouboru(**char** *vstupniSoubor), která projde vstupní soubor a naplní z něj výše zmíněné pole se seznamem vrcholů (hran).
Další spuštěná procedura **void** VytvoreniPoli() vytvoří (a vynuluje) pole, které budeme potřebovat později. Jsou to konkrétně:

- mixovane_delky[][] - dvourozměrné pole, v prvním sloupci máme čísla možných mixovaných délek, v druhém nuly (případně v průběhu programu jedničky - pokud byla hrana použita).
- ciste_delky_0 [][] - dvourozměrné pole, v prvním sloupci máme čísla možných čistých 00-délek, v druhém nuly (případně v průběhu programu jedničky - pokud byla hrana použita).

- ciste_delky_1 [][] - dvourozměrné pole, v prvním sloupci máme čísla možných čistých 11-délek, v druhém nuly (případně v průběhu programu jedničky - pokud byla hrana použita).
- labely_vrcholy [][] - dvourozměrné pole s pěti sloupci, v prvním sloupci máme indexy vrcholů ((X_0, Y_1) v první půlce nuly, v druhé jedničky), v druhém sloupci máme labely vrcholů $(0, \ldots, 2k)$ pro každou polovinu indexů, ve třetím sloupci máme nuly (případně v průběhu programu jedničky - značí, zda byl daný vrchol použit), ve čtvrtém sloupci máme také nuly (v průběhu programu jsou tam případně vrcholy, kterým jsme přiřadili daný label) a poslední sloupec je pomocný, jsou v něm čísla řádků pole $(1, \ldots, 2n)$.
- vysledek [][] - dvourozměrné pole, na začátku je vynulované, v průběhu programu se do něj píší čísla řádků z pole labely_vrcholy [][] , tzn. konkrétně prvky labely_vrcholy [4][i].

Předposlední procedura **void** VycisteniSouboru() vymaže předchozí obsah výstupního souboru, pokud nějaký existoval (aby nedošlo k nechtěnému přidávání dalších výsledků za sebe do stejného souboru) - pro soubor Vysledek.txt.
Následuje vybrání prvního vrcholu ze vstupního souboru, který se nebude již měnit (není to ani třeba) - tzn. přiřazení do pole vysledek [][] a změny v poli labely_vrcholy [][] (označit nultý prvek jako použitý a přiřazení vrcholu do čtvrtého sloupce).
Poslední je rekurzivní procedura **void** OhodnoceniVrcholu(**int** vstup), kterou se nyní budeme zabývat.
V první části kontrolujeme proměnnou vstup (jelikož se jedná o rekurzi) - pokud je větší nebo rovna počtu vrcholů dekrementovánu o jedničku, pak můžeme zapsat řešení. Zde se jako první vždy zavolá procedura **void** VypisOhodnoceni(**int** pocet), která do výstupního textového souboru (Vysledek.txt) zapíše vypočtené řešení - na první řádek zapíše pořadí řešení a na dalších řádcích sepíše seznam hran s jejich labely pro smíšené ohodnocení (tzn. 0_0, resp. 0_0, atd.). Následuje podmínka, která kontroluje, zda se má program ukončit (vypsal již všechny řešení, které jsme chtěli, popř. jestli jsme chtěli všechna řešení), nebo najít další ohodnocení.
Zbytek procedury tvoří cyklus **for**, na jehož začátku zkontrolujeme, zda byl momentálně zkoumaný label již použit či nikoli. Pokud použit nebyl, program pokračuje dál v cyklu - do proměnných vrchol0 a vrchol1 si uložíme informace o zkoumané hraně - tzn. o vrcholu předchozím a nově přidaným. V následujícím cyklu **for** si zjistíme, jaký label má předchůdce (vrchol0) (tzn. z pole labely_vrcholy [][] najdeme ten řádek, ve kterém je uložen daný vrchol vrchol0 (tato informace je uložena ve čtvrtém sloupci pole, viz výše)). Do pole vysledek[0][vstup] se zapíše řádek, na kterém je ohodnocení předchůdce (pro pozdější výpis).
Následují podmínky pro vypočtení (a určení, zda se jedná o smíšenou či čistou hranu) délky hrany. Informaci o tom, o jakou hranu se jedná, zjistíme pomocí indexů labelů - tzn. z prvního sloupce pole labely_vrcholy [][] . Následně se volají příslušné funkce, které vypočtou danou délku hrany (podle pravidel pro smíšené ohodnocení). V každé podmínce pro určení délky máme také ověřování, zda délka již byla nebo nebyla použita. Jestliže

délka hrany již použita byla, tak přeskočíme na další iteraci cyklu **for**. Jakmile máme vypočtenou délku hrany, a ta nebyla ještě použita (tzn. můžeme ji použít), označíme v poli labely_vrcholy [][] daný label jako použitý, do čtvrtého sloupce přiřadíme daný vrchol (ze vstupního souboru), do pole vysledek[1][vstup] zapíšeme řádek, na kterém je ohodnocení našeho vrcholu a délku hrany, kterou jsme použili, označíme za použitou (tzn. přepíšeme 0 na 1). Následuje rekurzivní volání procedury, a to OhodnoceniVrcholu(vstup+1). Pokud použijeme všechny možnosti a ohodnocení udělat nezle, musíme vrchol i délku hrany odznačit, tzn. změnit 1 na 0, taktéž přepsat na nulu pozici v našem poli vysledek [][] .

Mějme kostru T_1 se smíšeným ohodnocením O_1. Přičtěme k ohodnocením vrcholů T_1 číslo 1. Dostaneme kostru $T_2 \cong T_1$, která má smíšené ohodnocení $O_2 \neq O_1$. Ke všem ohodnocením vrcholů v T_2 přičtěme číslo 1. Dostaneme kostru $T_3 \cong T_2$, která má smíšené ohodnocení $O_3 \neq O_2$, $O_3 \neq O_1, \ldots$ atd. Takovou proceduru můžeme provést n-krát (pro kostru na $2n$ vrcholech), z čehož plyne, že z jediného smíšeného ohodnocení můžeme mít n různých ohodnocení. Proto celkový počet ohodnocení musí být násobek n. $E(T_i) \cap E(T_j) = \emptyset$, pro každé $i \neq j$.
Pro konkrétní vstupní soubor (viz ukázka 3) našel program 294420 (viz ukázka 4) řešení (pro kontrolu - počet vrcholů byl 14, tzn. $n = 7$ - číslo je dělitelné 7-mi - viz předchozí odstavec).

Program tedy pro zadanou kostru nalezne určitý (požadovaný) počet řešení (nebo všechna možná řešení smíšeného ohodnocení, která daná kostra má).

```
294420. reseni:
0_0 6_1
6_1 5_1
6_1 4_1
5_1 2_1
4_1 6_0
6_0 3_1
6_0 0_1
0_1 5_0
0_1 4_0
4_0 1_0
1_0 1_1
1_0 3_0
3_0 2_0
```

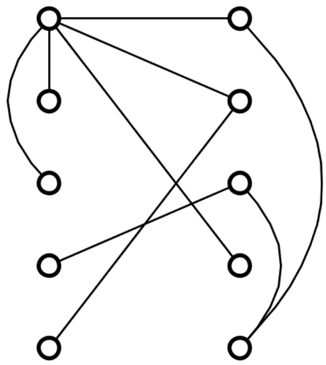
Ukázka 5: 294420. řešení

6 Závěr

V kapitole 5 jsme popsali funkci programu sloužící pro vstup zkoumaných stromů do softwaru pro paralelní vyhledávání faktorizací kompletních grafů a programu pro vyhledávání smíšených ohodnocení pro kostry.
V kapitole 4 této práce jsme dokázali, že:

Věta 6.1 *Každá 2-housenka řádu $2n$ faktorizuje kompletní graf K_{2n}, pro n liché, $n \geq 7$, jsou-li vrcholy stupně vyššího než dva sousední.*

Připomeňme však, že 2-housenky existují pro $n \geq 5$ a víme, že 2-housenky $[n-1, n-2, 2, 2, 2]$ se sousedními vrcholy stupňů $n-1$ a $n-2$ faktorizují K_{2n} i pro $n = 5$. Ještě tedy zbývá charakterizovat 2-housenky pro $n = 5$ typu $[n, n-3, 2, 2, 2]$, a to jsou $(5, 2, 2, 2, 2)$, $(2, 5, 2, 2, 2)$ a $(2, 2, 5, 2, 2)$. V [14] je dokázáno, že housenka $(5, 2, 2, 2, 2)$ nefaktorizuje K_{10}, ve [4] je dokázáno, že housenka $(2, 2, 5, 2, 2)$ nefaktorizuje K_{10} a housenka $(2, 5, 2, 2, 2)$ má smíšené ohodnocení (viz obr. 49) a proto faktorizuje K_{10}.



Obr. 49: Smíšené ohodnocení 2-housenky $(2, 5, 2, 2, 2)$

Přirozeným pokračováním této práce je výzkum faktorizací 2-housenek $[n, n-3, 2, 2, 2]$ a $[n-1, n-2, 2, 2, 2]$ se sousedními vrcholy stupně vyššího než 2 pro n sudá, zkoumat faktorizace 2-housenek $[n, n-3, 2, 2, 2]$ a $[n-1, n-2, 2, 2, 2]$, jsou-li vrcholy stupně vyššího než 2 nezávislé a zkoumat faktorizace 3-housenek, tj. housenek s průměrem 6, které mají tři vrcholy stupně vyššího než 2.

7 Reference

[1] Bloom, G.S.: *A chronology of the Ringel-Kotzig conjecture and the continuing quest to call all trees graceful.* Topics in Graph Theory, The New York Academy of Sciences (1979)

[2] Colbourn, C.J., Dinitz, J.H. (eds): *The CRC Handbook of Combinatorial Designs.* 2nd ed., Discrete Mathematics and Its Applications, CRC Press, Boca Raton (2007)

[3] Diestel, R.: *Graph Theory.* 3rd ed., Springer-Verlag. Berlin Heidelberg (2006)

[4] Eldergill, P.: *Decompositions of the complete graph with an even number of vertices.* M.Sc. Thesis, McMaster University, Hamilton (1997)

[5] El-Zanati, S. and Vanden Eynden, C.: *Factorizations of $K_{m,n}$ into spanning trees.* Graphs and Combinatorics, 15, 287–293 (1999)

[6] Fronček, D.: *Cyclic decompositions of complete graphs into spanning trees.* Discussiones Mathematicae Graph Theory, 24, No.2, 345–353 (2004)

[7] Fronček, D.: *Bi-cyclic decompositions of complete graphs into spanning trees.* Discrete Math., **307**, 1317–1322 (2007)

[8] Fronček, D.: *Note on factorizations of complete graphs into caterpillars with small diameters.* JCMCC, **57**, 179–186 (2006)

[9] Fronček, D.: *Úvod do teorie grafů.* Slezská univerzita v Opavě, Opava (1999)

[10] Fronček, D., Kovář, P., Kovářová, T., Kubesa, M.: *Factorizations of complete graphs into caterpillars of diameter 5.* Discrete Math, **310**, 537–556 (2010)

[11] Fronček, D., Kovář, P., Kubesa, M.: *Factorizations of complete graphs into trees with at most four non-leave vertices.*

[12] Fronček, D., Kubesa, M.: *Factorizations of complete graphs into spanning trees.* Congressus Numerantium, **154**, 125–134 (2002)

[13] Gallian, J.A.: *A dynamic survey of graph labeling.* Electronic Journal of Combinatorics, DS 6 (2009)

[14] Kovář, P., Kubesa, M., Meszka, M.: *Factorizations of complete graphs into brooms.* In Discrete Mathematics, 2012, vol. 312, 1084-1093

[15] Kovářová, T.: *Spanning Tree Factorizations of Complete Graphs, Ph.D. Thesis.* VŠB – Technical University of Ostrava (2004)

[16] Kubesa, M.: *Spanning tree factorizations of complete graphs.* JCMCC, **52**, 33–49 (2005)

[17] Kubesa, M.: *Factorizations of complete graphs into caterpillars of diameter four and five.* Ph.D. Thesis, VŠB – Technical University of Ostrava (2004)

[18] Rosa, A.: *On certain valuations of the vertices of a graph.* Theory of Graphs (Intl. Symp. Rome 1966), Gordon and Breach, Dunod, Paris, 349–355 (1967)

[19] Shibata, Y. and Seki, Y.: *The isomorphic factorization of complete bipartite graphs into trees.* Ars Combinatoria, **33**, 3–25 (1992)

[20] Vetrík, T.: *On factorization of complete graphs into isomorphic caterpillars of diameter* 6. Magia **22**, 17–21 (2006)

[21] West, D.B.: *Introduction to graph theory.* 2nd ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ (2001)

A Obsah přiloženého disku

- text bakalářské práce
- zdrojové kódy